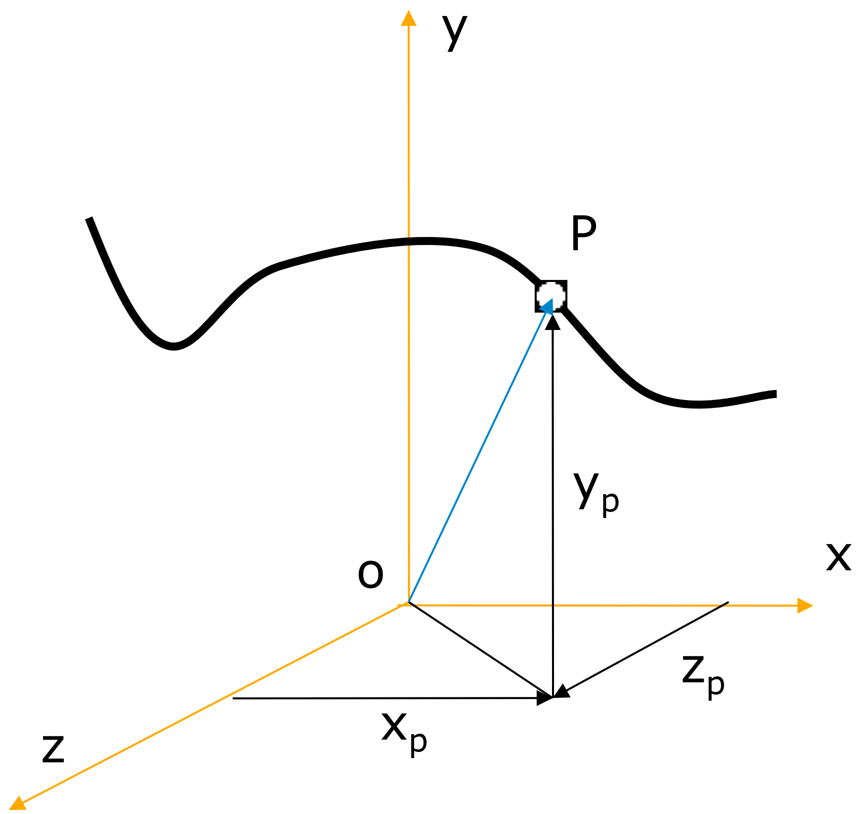
Moto di un punto

Cinematica unidimensionale

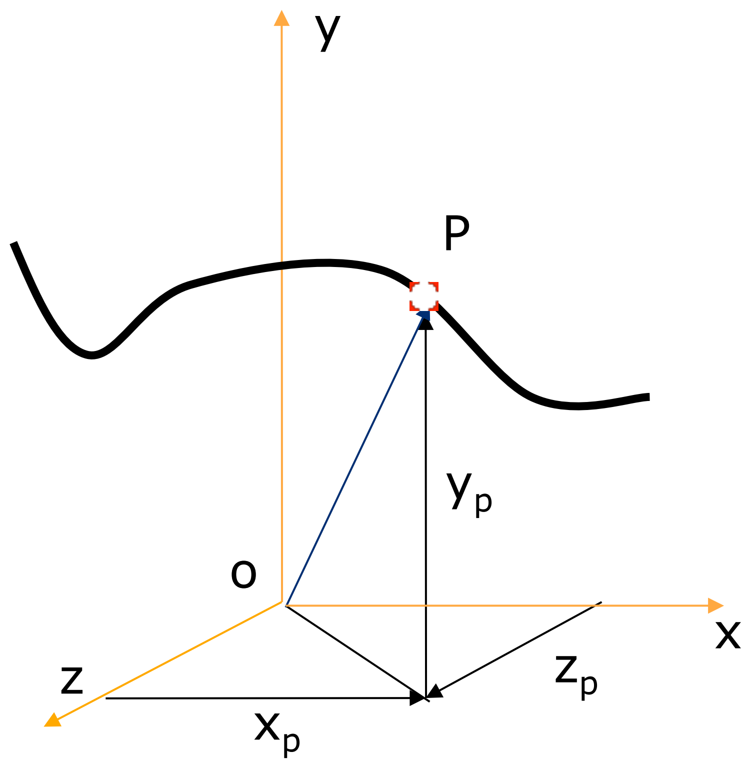
Il moto di un punto

- Un punto si muove, se nel tempo, cambia la sua posizione.
- Lo spostamento, la velocità e l' accelerazione sono grandezze vettoriali.
- Ora vogliamo mostrare che il moto di un punto nello spazio è la combinazione (somma e/o sottrazione) di moti vettoriali unidimensionali.
- Quindi è necessario conoscere come si comportano i moti unidimensionali



Moti unidimensionali

- La posizione di un punto nello spazio è individuata dal valore delle sue proiezioni sugli gli assi.
- Se, nel tempo, la posizione di un punto cambia (velocità di un punto) anche le posizioni delle proiezioni lungo gli assi, nel tempo, cambiano.
- Il moto di un punto nello spazio è la somma vettoriale dei moti unidimensionali lungo ciascuno degli assi cartesiani.
- Sarà quindi fondamentale conoscere le caratteristiche del moto unidimensionale di un punto.



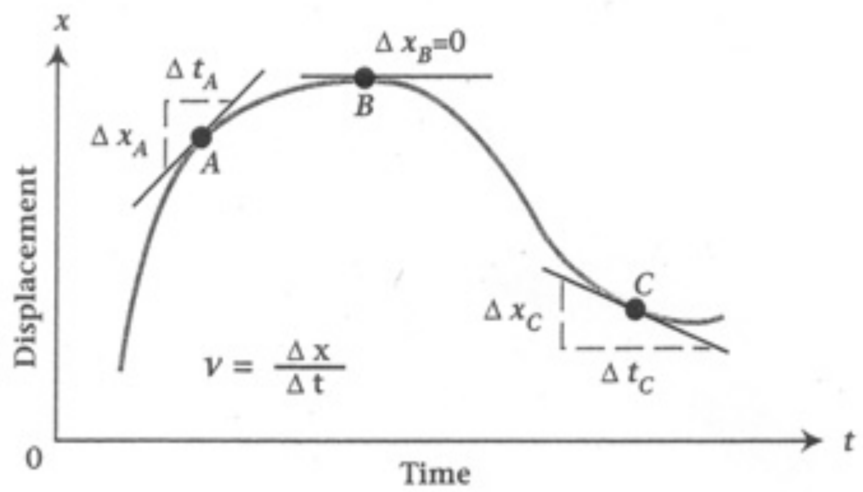
Velocità media

- La velocità media è data da:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

- Variazione della posizione, in un dato intervallo di tempo.
- La velocità si misura in [m/s]

Velocità istantanea



La velocità media non descrive il moto con sufficiente precisione. Per avere una velocità corretta punto per punto dobbiamo definire una velocità istantanea.

- La velocità istantanea è la velocità in un intervallo di tempo piccolissimo. Questa operazione è la derivata
- In A la derivata è positiva; ci si allontana dall'origine.
- In B la derivata è nulla, si rimane nella sessa posizione.
- In C la derivata è negativa, si sta tornando all'origine.

Limite del rapporto incrementale

- La velocità istantanea è il limite del rapporto incrementale $\Delta x/\Delta t$. Ovvero lo spazio percorso in un intervallo di tempo infinitamente piccolo

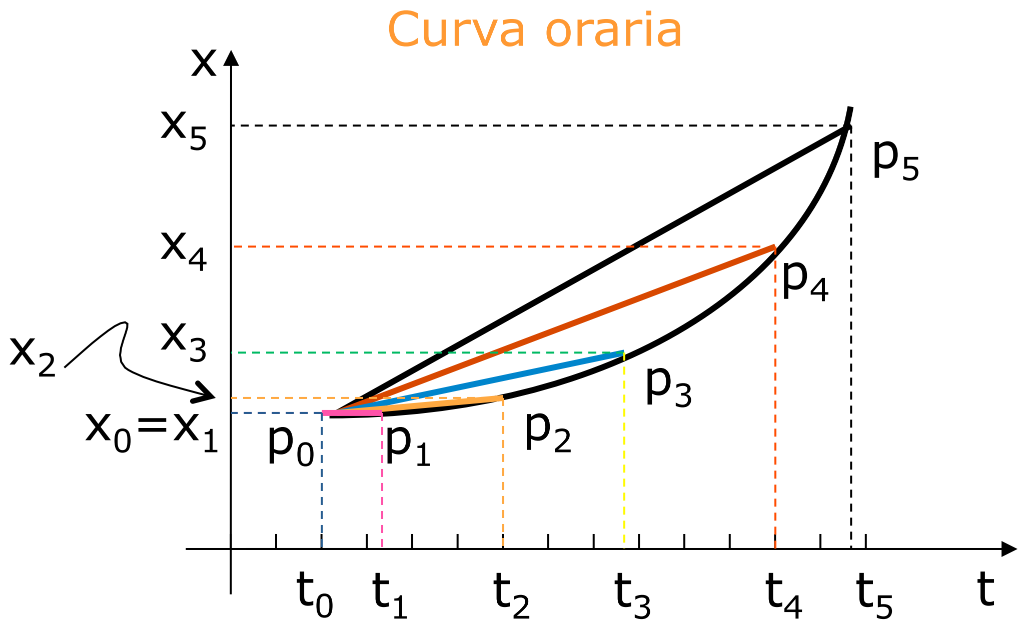
$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

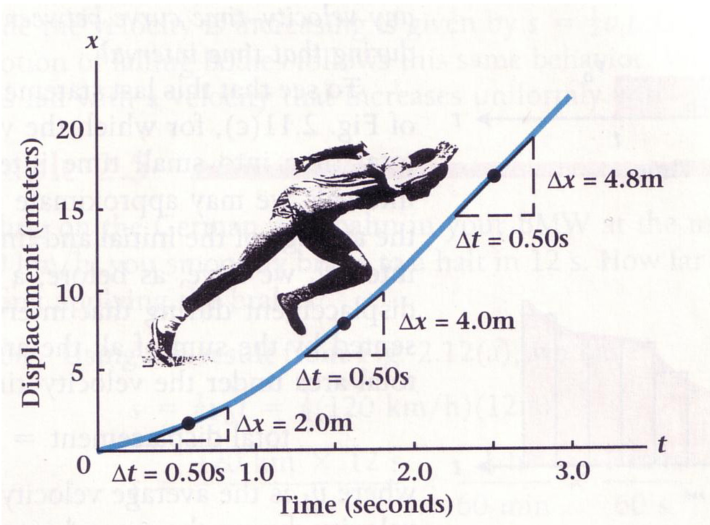
- *v* è in ogni istante la tangente della curva che descrive la traiettoria

Velocity and speed

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A}$$

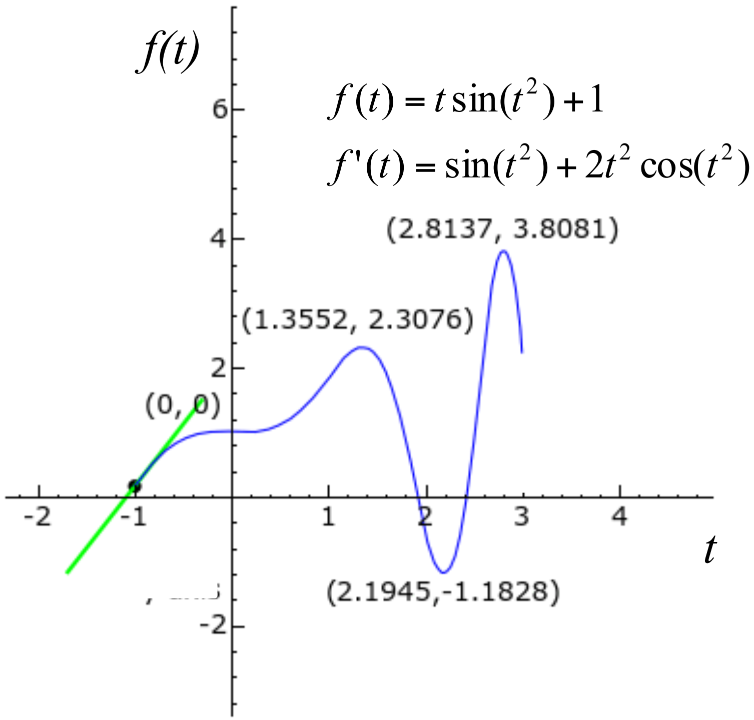
$$v_{ist} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$





Fare il rapporto Δx/Δt significa calcolare la tangente in un intervallo di tempo definito. L'algoritmo derivata è il limite di tale rapporto incrementale.

Significato geometrico della derivata



- La derivata è il limite del rapporto incrementale ed è il valore della tangente in ciascun punto della curva esaminata.
- La derivata può essere positiva o negativa a seconda che la curva salga o scenda e può essere nulla quando la tangente alla curva risulti essere orizzontale
- Una derivata infinitamente grande significa che in quel punto la tangente è verticale ovvero parallela all'asse *f(t)*.

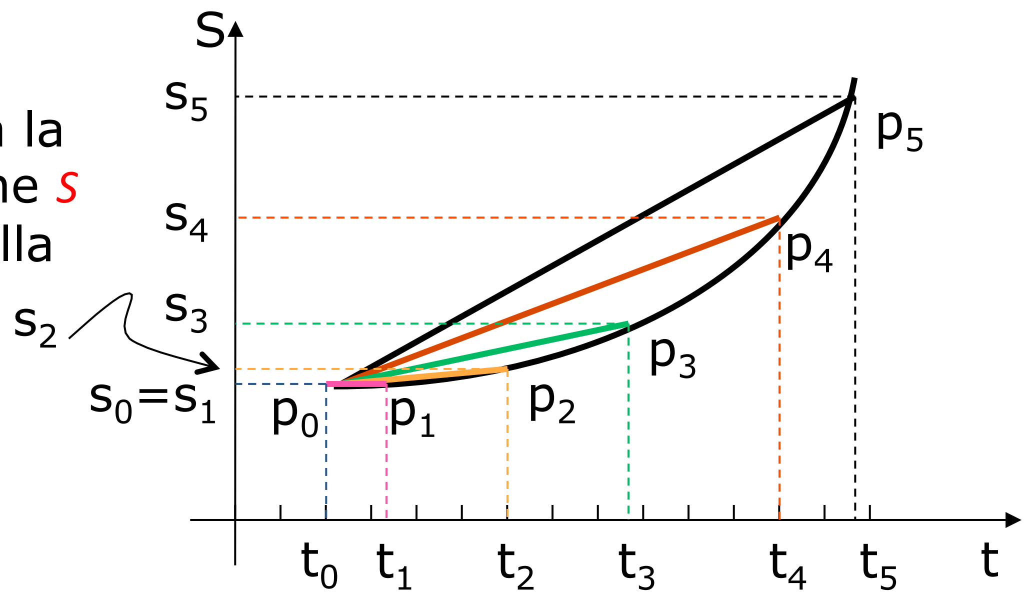
$$f(t) = t\sin(t^2)+1 \qquad f'(t) = \sin(t^2)+2t^2\cos(t^2)$$

Concetto di derivata

La pendenza m di una retta

$y = mx + q$

fra i punti P_0 e P_i è il rapporto fra la differenza dei valori della funzione *s* nei punti scelti e la differenza della variabile indipendente t.



$$m = \frac{\Delta S(t)}{\Delta t} = \frac{S(a+t) - S(a)}{t}$$

La derivata della funzione *s* è una altra funzione *s'* il cui valore è il limite del rapporto incrementale, per intervalli *t* infinitamente piccoli.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S(t)}{\Delta t} \qquad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(a+t) - S(a)}{t}$$

Esempi di derivate

Calcoliamo la derivata di: $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{a(x+h)^2 + b(x+h) + c - ax^2 - bx - c}{h} =$$

$$\frac{a[(x+h)^2 - x^2] + b[(x+h) - x]}{h} = \frac{a(2hx + h^2) + bh}{h} = 2ax + b + ah$$

e nel lim per h $\rightarrow$ 0 sara': $f'(ax^2 + bx + c) = 2ax + b$

Calcolo della derivata di: $f(x) = \sqrt{x}$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} =$$

$$\frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} =$$

e per il lim per h $\rightarrow$ 0 avremo: $f'(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Derivate tipiche

Funzione	Derivata
x^{α}	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$tg x$	$1/\cos^2 x$
$\ln x$	$1/x$
a^x	$a^x \ln a$

- La derivata di una somma è data dalla somma delle derivate
- la derivata di un prodotto è data dalla somma della derivata del primo termine per il secondo non derivato più la derivata del secondo termine per il primo non derivato
- La derivata di un quoziente di funzioni è data dal quoziente fra la derivata del numeratore per il denominatore non derivato meno il numeratore per la derivata del denominatore e tutto diviso per il denominatore al quadrato

x, dx/dt, d^2x/dt^2

✓ la variazione della posizione nel tempo definisce la velocità. Allo stesso modo la variazione della velocità nel tempo definisce l'accelerazione.

$$v = (x_2 - x_1)/(t_2 - t_1)$$

$$a = (v_{x2} - v_{x1})/(t_2 - t_1)$$

✓ Pertanto conoscere la funzione posizione, istante per istante, equivale a conoscere, istante per istante, la velocità e l'accelerazione