Vettori

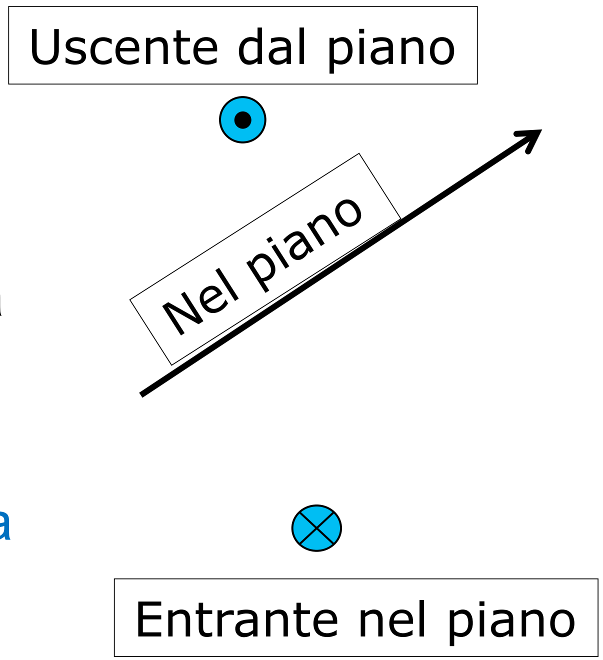
Definizione e sue rappresentazioni

Definizione di vettore

- Ci sono grandezze che non possono essere definite solo dalla loro intensità. Esempio: la velocità, la forza, il momento angolare, etc.

- Queste grandezze sono vettori e per essere definite, è necessario conoscere il la loro intensità, la direzione ed il verso.

- Per rappresentare una grandezza vettoriale si usa una freccia la cui lunghezza è proporzionale all'intensità, la direzione è l'angolo che forma rispetto ad un asse (normalmente l'asse orizzontale) e la punta indica il verso positivo.



- Naturalmente, la somma di due vettori non sarà la semplice somma delle sue due intensità.

Somma di due vettori

- Due vettori con la stessa direzione, la stessa intensità e lo stesso verso sono identici, quindi la traslazione di un vettore è una operazione di identità.

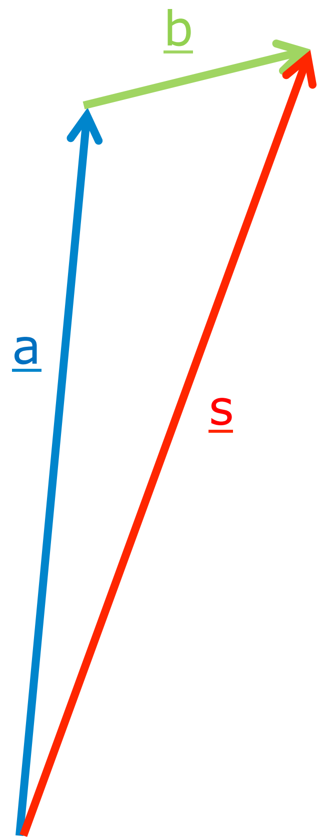
- La somma s di due vettori, a e b, non è la somma delle sue intensità (o suoi moduli).

- Nella sua rappresentazione grafica la somma avviene nel seguente modo:

i. si trasla il secondo vettore in modo da far coincidere la sua origine con la punta del primo vettore;

ii. si traccia la congiungente che va dall'origine del primo vettore fino alla punta del secondo vettore.

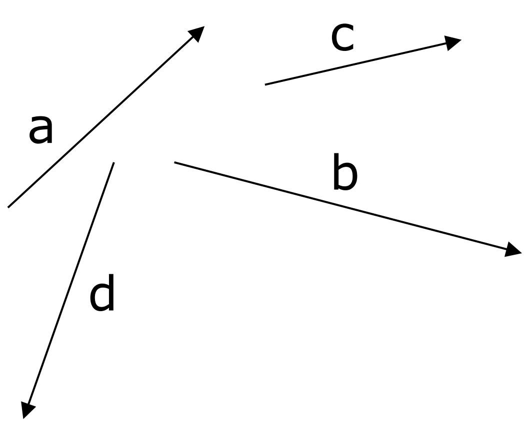
iii. Il vettore somma ha l'intensità, la direzione e il verso della congiungente

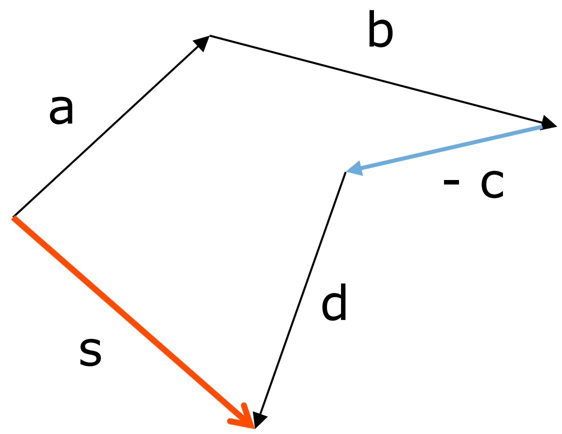


s = a + b

Somma di più vettori

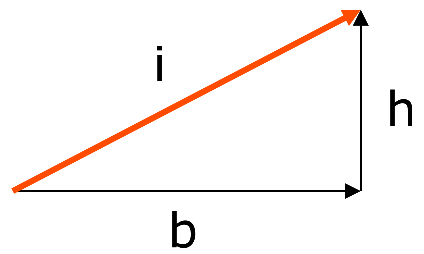
- Un vettore è negativo se ha stessa direzione, ma verso opposto del vettore considerato positivo.
- Il vettore $\underline{f} = \underline{m} - \underline{n}$ è equivalente a $\underline{f} = \underline{m} + (-\underline{n})$
- La somma di più vettori: $\underline{s} = \underline{a} + \underline{b} - \underline{c} + \underline{d}$





Vettori perpendicolari

Nel caso particolare della somma di due vettori perpendicolari possiamo dire che il vettore risultante altro non è che l' ipotenusa di un triangolo rettangolo i cui cateti sono i vettori da sommare.



Ovviamente il modulo della risultante è dato dal teorema di Pitagora

$$i^2 = b^2 + h^2$$

Segmento nello spazio

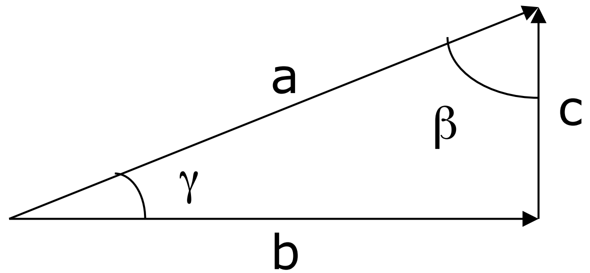
- Il concetto di vettore, è molto utile nel uso delle grandezze fisiche e anche molto utile nella descrizione della geometria Euclidea.

- In un triangolo rettangolo, se sono note le lunghezze dei due cateti, saranno noti la lunghezza dell' ipotenusa e l' angolo che l' ipotenusa forma con i cateti

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$\gamma = arctg\ c/b = tan^{-1}\ c/b$$

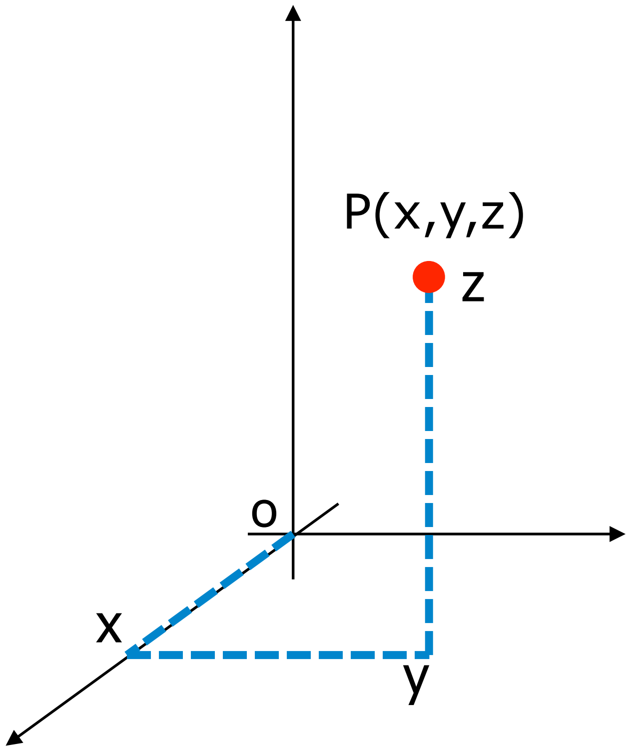
$$\beta = 90° - \gamma$$



- La lunghezza e la direzione di qualsiasi segmento si può trovare conoscendo la lunghezza delle sue proiezioni su gli assi cartesiani.

Cosa conoscere degli assi Cartesiani

- Tre vettori perpendicolari tra loro formano un sistema di assi cartesiani.
- Il loro punto di incontro è l'origine del sistema di riferimento.
- L'ordine dei tre assi x,y e z è univoca e costituisce una terna destrorsa.
- Nello spazio reale le unità di misura sono uguali per tutti e tre gli assi.
- La posizione di un oggetto è individuata conoscendo le tre coordinate P = (x, y, z) che sono le distanze dall'origine lungo ciascun asse.



Coordinate Polari

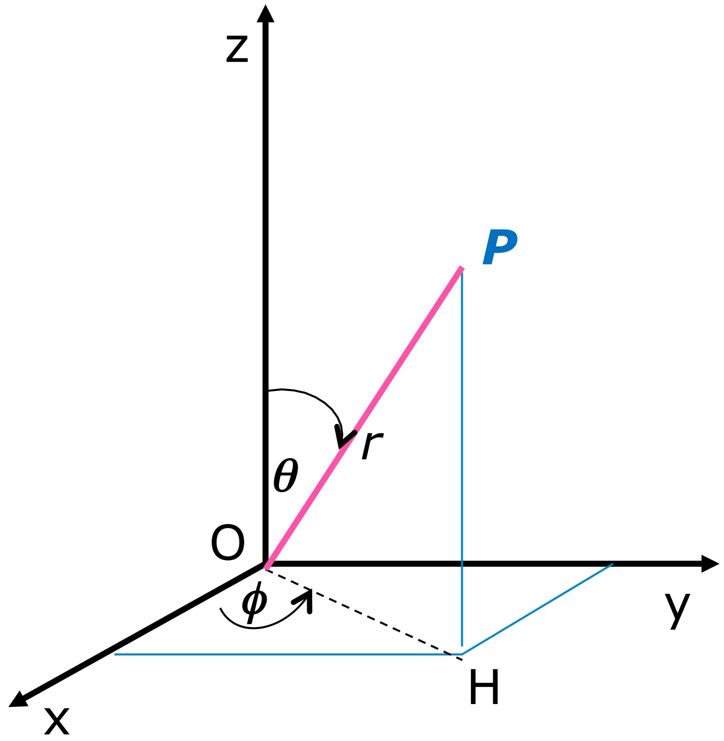
Nell'individuare la posizione di un punto può essere conveniente usare le coordinate polari.

Un punto sarà individuato conoscendo la lunghezza del segmento ***r*** che va dall'origine al punto ***P*,** e da gli angoli θ e ϕ definiti come in figura

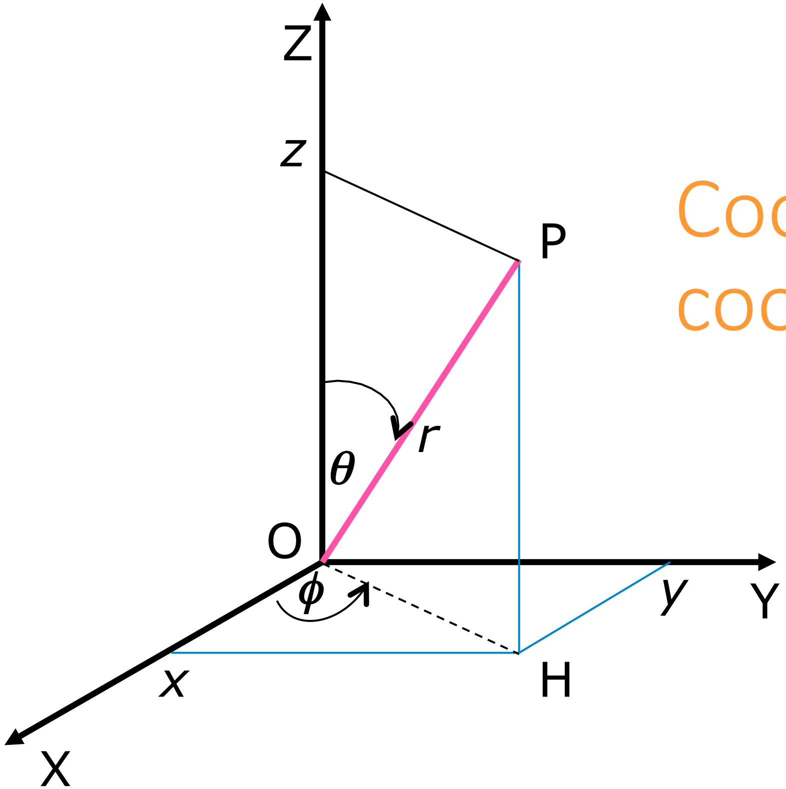
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \cos^{-1}\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = \cos^{-1}\left(\frac{z}{r}\right)$$



Coordinate rettangolari vs. coordinate sferiche



La coordinata x non è altro che la proiezione del segmento OH sull'asse X ovvero OH cosϕ.

Ma OH è a sua volta $r \sin\theta$ quindi **$x = r \sin\theta \cos\phi$**

Analogamente la coordinata y sarà la proiezione di OH sull'asse Y ovvero OH sinϕ , ma OH vale $r \sin\theta$ quindi **$y = r \sin\theta \sin\phi$**

Infine la coordinata z è la proiezione di OP sull'asse Z ovvero OP cosθ quindi possiamo scrivere **$z = r \cos\theta$**

Le regole dell'algebra vettoriale

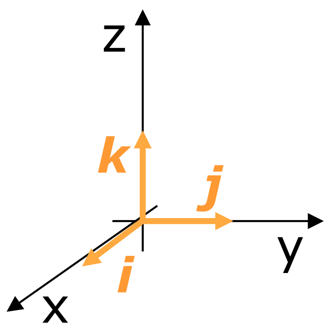
- Abbiamo visto che, nello spazio, ogni vettore può ottenersi dalla somma di tre vettori perpendicolari tra loro.

- In un sistema di riferimento cartesiano supponiamo che $\underline{\boldsymbol{i}}$, $\underline{\boldsymbol{j}}$, $\underline{\boldsymbol{k}}$ siano i versori (vettori di lunghezza unitaria) degli assi ***x, y, z***.

- Allora il vettore ***r*** che unisce l'origine del nostro sistema di riferimento O ad un punto generico dello spazio ***P*** potrà essere scritto:

$$\underline{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{x_p}\underline{\boldsymbol{i}} + \boldsymbol{y_p}\underline{\boldsymbol{j}} + \boldsymbol{z_p}\underline{\boldsymbol{k}}$$

dove i coefficienti dei versori sono le distanze lungo gli assi cartesiani delle componenti del vettore $\underline{\boldsymbol{r}}$



- Inoltre è facile verificare che le componenti scalari di ***r*** sono i coseni direttori

$$\boldsymbol{x = r\cos\alpha}$$

$$\boldsymbol{y = r\cos\beta}$$

$$\boldsymbol{z = r\cos\gamma}$$