

Calcolo 1

Prof. C. Liverani

Corso di Laurea in Fisica--PRIMO Anno - I Semestre - 12 CFU

PROGRAMMA (provvisorio, si veda il diario delle lezioni per maggiori dettagli)

**Rudimenti di teoria degli insiemi:** Insieme potenza, cardinalità, insiemi infiniti, il principio di induzione.

**Numeri naturali, interi e razionali:** operazioni algebriche, ordine – il ben ordinamento dei numeri naturali.

**Numeri reali:** operazioni algebriche, ordine – l'assioma di continuità, valore assoluto, distanza. La retta reale ampliata.

**Funzioni:** il grafico, composizione ed inversione, il grafico della funzione inversa. Funzioni limitate, massimi e minimi. Funzioni monotone, funzioni pari e dispari, funzioni periodiche. Funzioni elementari: polinomi, funzioni razionali, potenze, esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche, funzioni trigonometriche inverse, funzioni iperboliche.

**Limiti di funzioni:** limiti da destra e da sinistra, limiti di funzioni monotone. Teorema del confronto per limiti di funzioni, permanenza del segno, l'algebra dei limiti. Alcuni limiti notevoli.

**Successioni:** proprietà che valgono definitivamente, limite, convergenza, limitatezza, permanenza del segno, operazioni algebriche. Successioni monotone e la loro convergenza: l'algoritmo di Erone per calcolare radici quadrate, il numero  $e$  di Nepero.

**Serie:** convergenza, passaggio dalle serie a successioni e viceversa. Esempi: sviluppo in serie delle potenze del numero di Nepero, serie geometriche, serie armoniche generalizzate. Serie a termini positivi: il criterio del confronto, il criterio della radice, il criterio del rapporto. Serie a termini reali arbitrari: convergenza assoluta. Serie a termini di segno alternato: il criterio di Leibniz.

**Continuità:** continuità da destra e da sinistra, punti di discontinuità, salti,

il caso delle funzioni monotone, operazioni algebriche con funzioni continue. Il teorema dei valori intermedi. Legami tra la monotonia e l'invertibilità delle funzioni continue definite su intervalli, la continuità della funzione inversa. Il teorema di Weierstrass sull'esistenza di massimi e minimi.

**Continuità uniforme:** definizione, esempi, funzioni continue su intervalli chiusi limitati. Funzioni lipschitziane.

**Derivate:** derivata destra e sinistra, retta tangente al grafico, punti a tangente verticale. Regole di derivazione: derivata della somma, del prodotto, del quoziente, della funzione composta e della funzione inversa. Le derivate di alcune funzioni elementari: potenza, funzione esponenziale, logaritmo, seno, coseno, tangente, cotangente, ed arcoseno, arcocoseno, arcotangente, arcocotangente.

**Teoremi del valor medio.** I teoremi di Rolle e di Lagrange e la caratterizzazione della monotonia tramite il segno della derivata. Determinazione di massimi e minimi locali. Forme indeterminate riconducibili a  $0/0$  o  $\infty/\infty$ .

**La formula di Taylor.** Derivate successive. Funzioni convesse e concave. Studio del grafico di una funzione. La forma generale - con il resto di Peano - della formula di Taylor. Uso della formula di Taylor nel calcolo dei limiti. Il resto di Lagrange e sviluppi in serie di Taylor.

**Numeri complessi:** operazioni algebriche, il coniugato ed il modulo, rappresentazione geometrica, la forma trigonometrica. Potenze e radici di numeri complessi. La convergenza di successioni e di serie di numeri complessi. La funzione esponenziale per variabile complessa, la formula di Eulero.

**Integrazione secondo Riemann sulla retta.** Definizione e criterio di integrabilità. L'integrabilità delle funzioni continue e delle funzioni monotone. La formula fondamentale del calcolo integrale, l'integrale indefinito. Integrazione per sostituzione e integrazione per parti. Decomposizione in fratti semplici e integrazione delle funzioni razionali. Integrali riducibili all'integrazione di funzioni razionali.

**Integrali impropri:** convergenza, il criterio del confronto, convergenza assoluta. Il criterio integrale per la convergenza delle serie a termini positivi decrescenti.

**Funzioni di più variabili.** Insiemi vettoriali aperti, chiusi, limitati, compatti. Funzioni vettoriali versus funzioni reali; il grafico di una funzione reale di più variabili, insiemi (curve) di livello; funzioni radiali. Limiti, continuità e uniforme continuità di funzioni di più variabili. Il teorema di Weierstrass sull'esistenza di massimi e minimi per funzioni di più variabili. Successioni e serie vettoriali convergenti, serie vettoriali assolutamente convergenti.

**Calcolo differenziale per funzioni di più variabili:** derivate parziali, derivate direzionali, differenziabilità, il piano tangente al grafico di una funzione di due variabili, teoremi del valor medio, il teorema del differenziale totale. Derivate parziali di ordine superiore, il teorema di Schwarz, la formula di Taylor. Massimi e minimi locali per funzioni di più variabili. Il teorema delle funzioni implicite, massimi e minimi vincolati.

**Successioni e serie di funzioni.** Convergenza uniforme di successioni di funzioni: caso delle funzioni continue, caso delle funzioni differenziabili. Versioni continue: la continuità e la differenziabilità di integrali dipendenti da un parametro. Convergenza totale di serie di funzioni: caso delle serie di potenze.

**Curve:** curve regolari a tratti, equivalenza; la lunghezza, integrali rispetto al parametro arco (integrali curvilinei di prima specie).

**Campi vettoriali e forme differenziali.** L'integrale del lavoro, forme differenziali (di ordine 1), integrali di forme differenziali (integrali curvilinei di seconda specie). Forme differenziali esatte e campi vettoriali conservativi; primitive e funzioni potenziali. Forme differenziali chiuse e campi vettoriali irrotazionali.