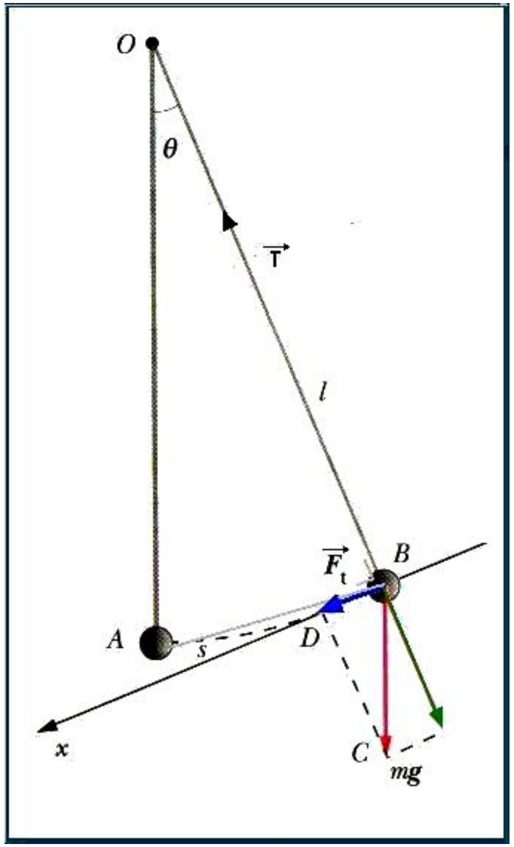
Pendoli

Definizione di:

Pendolo semplice, a torsione, reale, conico, smorzato

Il pendolo matematico

- Il pendolo matematico consiste in una pallina puntiforme di massa ***m***, sospesa tramite un filo di lunghezza ***L***, inestensibile e di massa trascurabile
- I triangoli ABO e BDC sono simili e quindi



$$BD : BC = BA : BO$$

$$F_t : mg = s : l$$

$ma : mg = s : l \quad a:g = s:l \quad \boldsymbol{a = (g/l)\, s}$

sapendo che $\quad a = \omega^2 s \quad$ e $\quad \omega = 2\pi/T$

$\omega^2 s = (g/l)\, s \qquad 4\pi^2/T^2 = g/l$

$$T = 2\pi\sqrt{(l/g)}$$

Pendolo fisico

Le forze agenti sul pendolo sono: la forza peso e la tensione del filo.

$F_g \sin\theta$ è la forza di richiamo, pertanto il momento della forza rispetto al vincolo vale $\underline{\tau = I\alpha}$

$\tau = - L\, F_g \sin\theta \qquad \tau = - L\, mg \sin\theta = I\alpha$

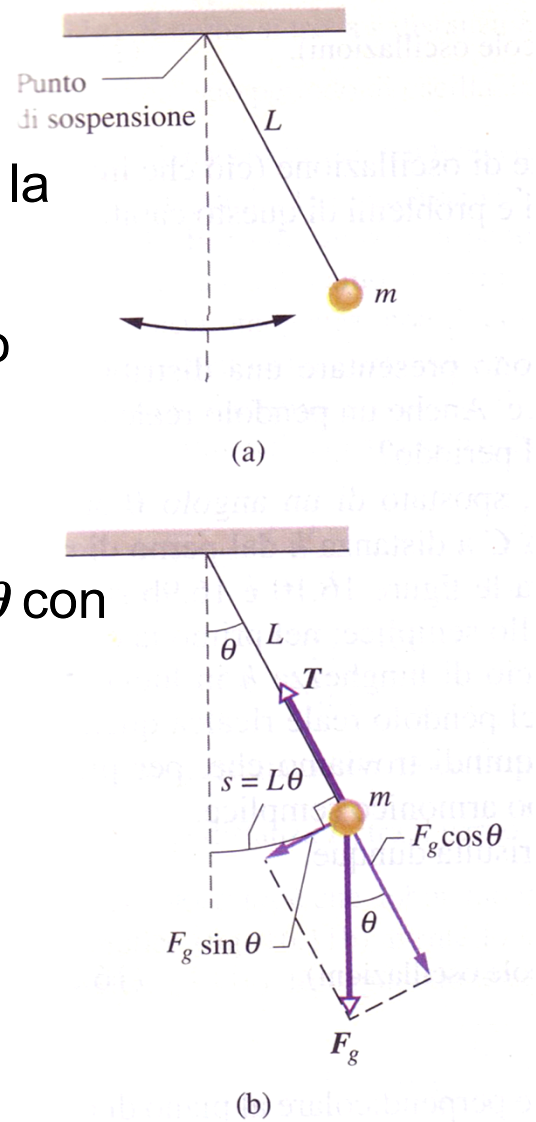
Per angoli piccoli fino $\theta \sim 5°$ si può sostituire $\sin\theta$ con θ facendo un errore < 0,1%, quindi:

$$- L\, mg\, \theta = I\alpha$$

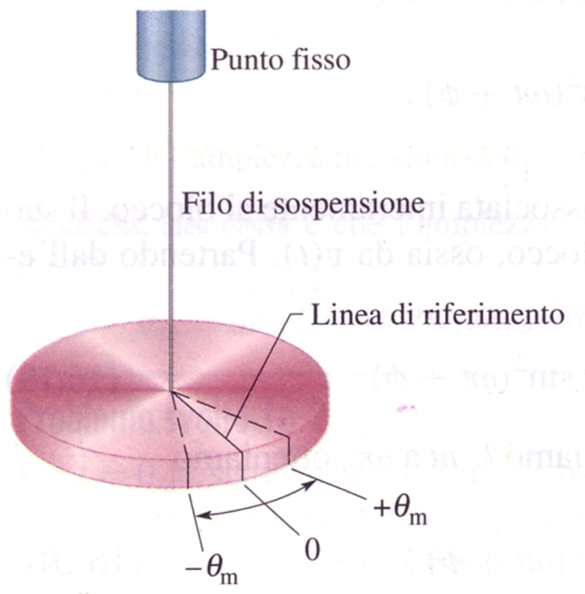
$\alpha = - (mg\, L/I)\theta \qquad d^2\theta/dt^2 + (mg\, L/I)\theta = 0$

confrontando con la soluzione dell'oscillatore armonico ($k/m = \omega^2$) abbiamo che $\omega = \sqrt{(mg\, L/I)}$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}} = 2\pi\sqrt{\frac{mL^2}{mgL}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$



Pendolo a torsione



Torcendo il filo di sospensione di un angolo θ si realizzerà un momento torcente di richiamo che si oppone allo spostamento

$$\tau = -k\theta$$

$$I\, d^2\theta/dt^2 + k\theta = 0$$

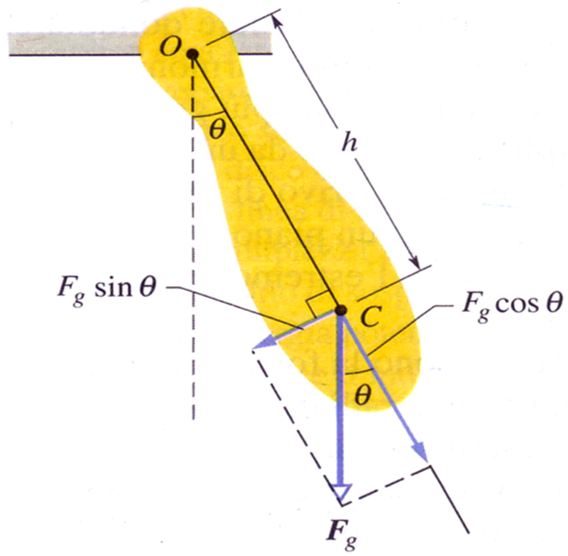
k è la costante di richiamo e dipende dal tipo di filo (lo spessore, l'elasticità, la lunghezza etc.etc.)
La formula del momento torcente è quella della legge di Hook da cui si ricava il periodo dell'oscillazione

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}}$$

Il momento di inerzia è
$I = ½ Mr^2$
(quello di un disco – cilindro)

Pendolo reale

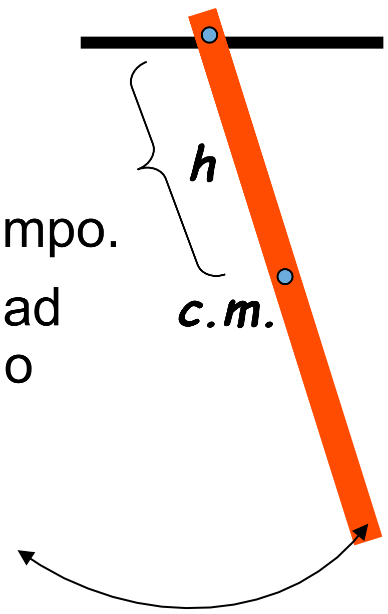
Nel pendolo reale, la cosa fondamentale da comprendere è dove collocare la forza di richiamo, cioè dove è il centro di massa *C* dell'oggetto oscillante e quanto dista dal punto di rotazione *h*.



Infatti la forza di gravità che agisce nel centro di massa avrà una componente, non compensata dalla rigidità del corpo che costituisce la forza di richiamo. La distanza che lo separa il C.M. dal punto di oscillazione *h* interviene nella formula sia per il calcolo della costante di richiamo che nel calcolo del momento di inerzia.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{cm} + mh^2}{mgh}}$$

Misura del valore di g



- La misurazione di g può essere fatta con la stessa precisione della misura di una lunghezza e di un tempo.
- Un'asta omogenea di lunghezza L = 2h è sospesa ad un punto P distante h dal centro di massa. Il periodo naturalmente è:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}$$

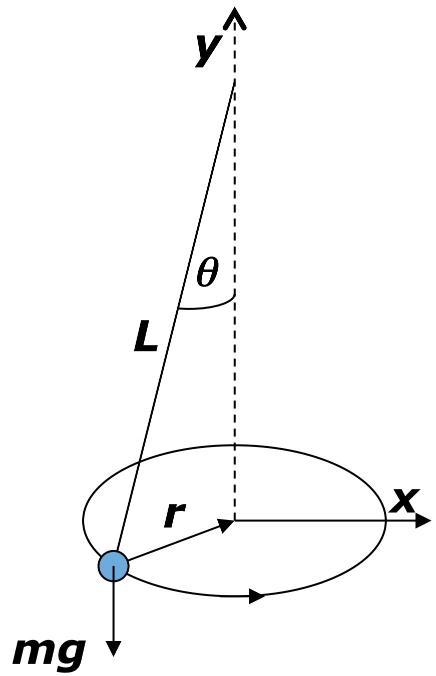
I è il momento di inerzia della sbarra, calcolato con il teorema degli assi paralleli, ad una distanza *h* dal centro di massa e vale

$$I = I_{cm} + mh^2 \qquad I = (1/12)mL^2 + m(1/2L)^2 = 1/3\, m\, L^2.$$

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{I}{mgh} \quad \Rightarrow \quad g = 4\pi^2 \frac{1/3\, mL^2}{mT^2\, L/2} = \frac{8\pi^2 L}{3T^2}$$

Pendolo conico

Nelle condizioni di figura



Il raggio della base conica è $\underline{r} = L \sin\theta$. Le forze in gioco sono la forza peso $\underline{P}$ *e* la tensione del filo $\underline{L}$. *Il peso ha solo la componente verticale mentre le componenti di L sono:*

$L_x = L \sin\theta \qquad L_y = L \cos\theta$

$L \sin\theta = mv^2/r$

$L \cos\theta = mg$

$tg\theta = v^2/rg$

Ricordando che $v = 2\pi r/T \qquad tg\theta = [(2\pi r)^2/T^2]/rg$

$T = 2\pi r/(rg\ tg\theta)^{-½}$

da correggere

$$T = 2\pi\sqrt{(L \cos\theta/g)}$$