Le onde

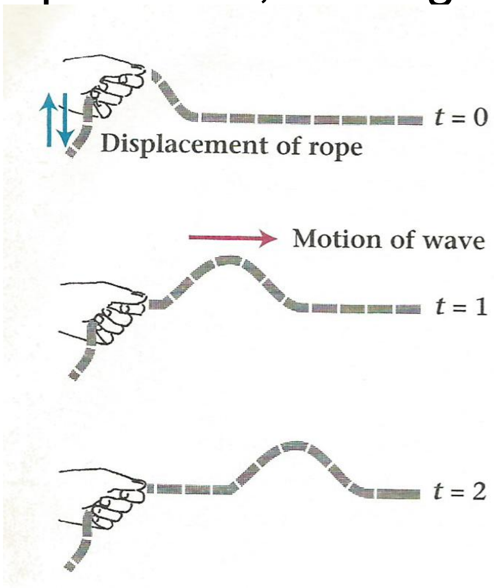
Rappresentazione delle onde

Classificazione delle onde

Propagazione delle onde

Definizione di onda

- Le onde sono perturbazioni locali di un mezzo continuo che si ripetono, nel tempo e/o nello spazio, in modo periodico, vedi fig.

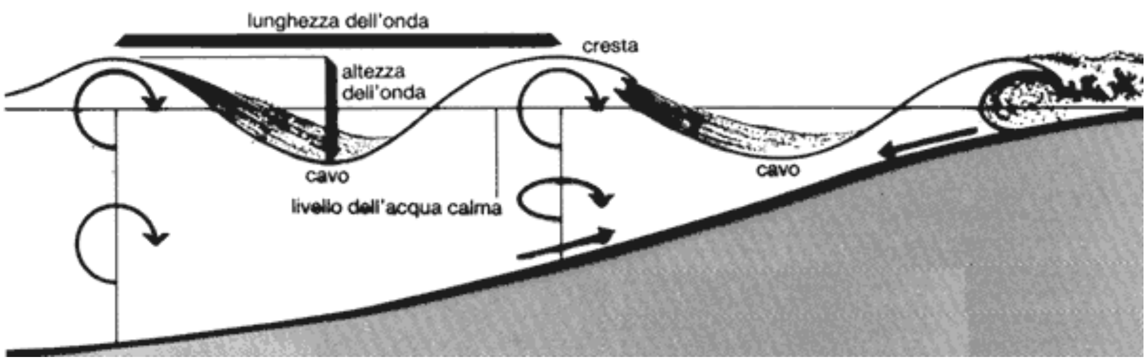


- Il mezzo attraverso cui le onde si propagano possono essere di natura molto diverse: pressione di un gas, tensione di un solido, superficie di un liquido o il vuoto nel caso di un campo elettromagnetico.
- anche il tipo di onda può essere diverso: onde longitudinali, trasversali, circolari, elicoidali, ma le equazioni che governano queste perturbazioni sono le stesse.
- La perturbazione si propaga nello spazio circostante in un tempo finito che dipende dalle caratteristiche del mezzo.

Esempio: il suono si propaga nell'aria a $3,3 \times 10^2$ m/s, mentre le onde elettromagnetiche viaggiano nel vuoto a circa 3×10^8 m/s,.

Caratteristiche della propagazione delle onde

- Le onde trasportano energia ***E*** come è evidente osservando le onde sismiche dei terremoti o le onde elettromagnetiche che dal Sole trasportano energia pari a circa 1kW/m^2 sulla crosta terrestre.
- Le onde trasportano quantità di moto ***p*** come è visibile quando le onde vengono assorbite o riflesse. La pressione esercitata sullo schermo è dovuta alla variazione temporale della quantità di moto.
- Le onde non trasportano materia.
- Quello che si propaga è lo stato di moto, l'informazione del moto.

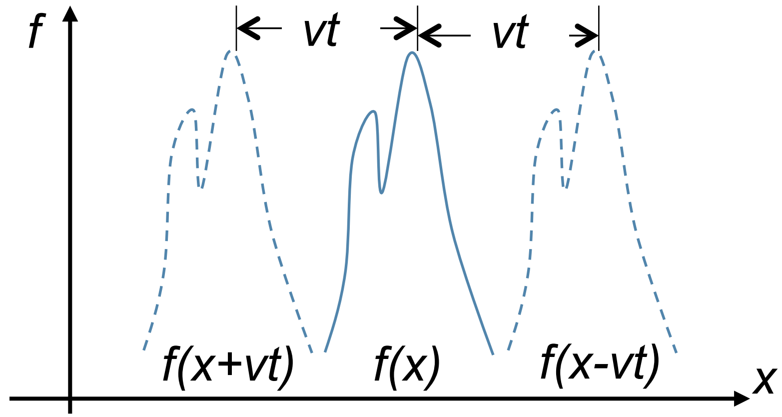


- Osservando una barca in <u>mezzo al mare</u> si può notare che essa si alza e si abbassa, ma non procede nella direzione dell'onda.

Le formule delle onde

Sia ζ **= *f(x)*** una perturbazione spaziale di un sistema in quiete.

Se tale perturbazione si propaga con velocità *v* dopo un tempo *t* avremo una nuova funzione che dovrà essere identica a quella precedente e la sua funzione dovrà essere $f(x \pm vt)$ e il segno dipende dal verso della propagazione. Vedi figura.



Possiamo concludere dicendo che l'espressione più generale di un'onda progressiva è data da $\zeta(x,t) = f(x-vt)+ g(x+vt)$. Si può dimostrare che qualunque sia la forma della perturbazione, ossia qualunque sia la $\zeta(x,t) = f(x \pm vt)$ esse sono sempre soluzione dell'equazione di d'Alembert. Per semplicità scriviamo $\zeta(x,t) = f(w)$

Equazione di d'Alembert (1717 – 1783)

Sia ***ζ(x,t) = f(x ± vt) = f(w)*** la forma d'onda di una perturbazione che viaggi lungo x e vari nel tempo, allora:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = \pm v$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{df}{dw}\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{df}{dw} \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{df}{dw}\frac{\partial w}{\partial t} = \pm v\frac{df}{dw}$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{df}{dw}\right) = \frac{d^2 f}{dw^2}\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{d^2 f}{dw^2}$$

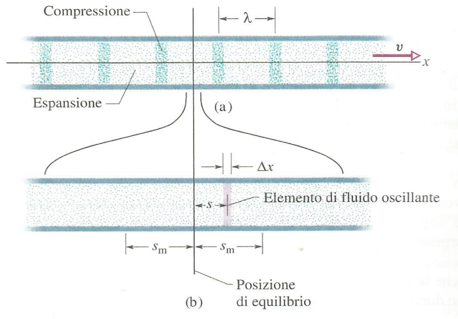
$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\pm v\frac{df}{dw}\right) = \pm\frac{d^2 f}{dw^2}\frac{\partial w}{\partial t} = v^2\frac{d^2 f}{dw^2}$$

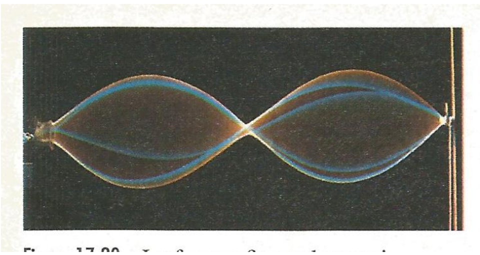
$$\boxed{\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}}$$

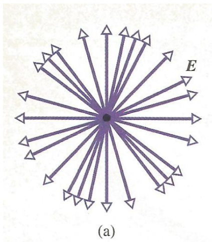
Questa è una equazione differenziale, lineare di tipo iperbolico, equazione di d'Alembert. Possiamo concludere che se le equazioni che governano un generico campo portano all'equazione di d'Alembert; allora il campo si propaga come un onda

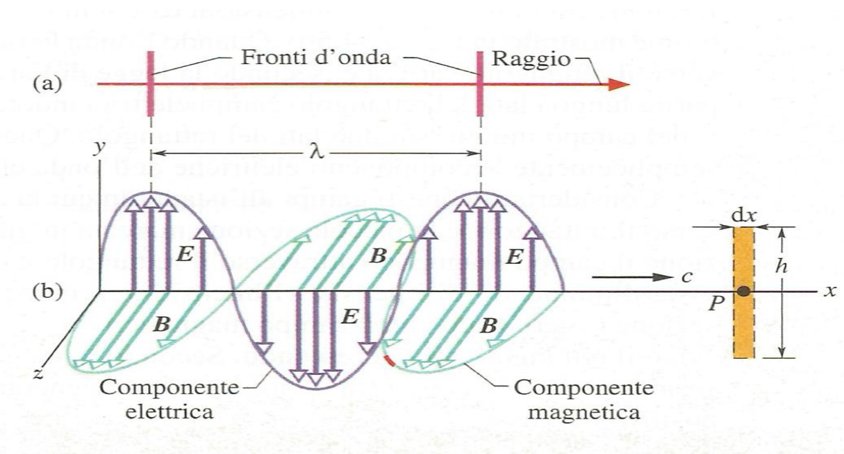
Classificazione delle onde

Possiamo classificare le onde in vario modo.
In base alle proprietà fisiche: onde sonore, onde di materia, onde elettromagnetiche .
In base alla relazione esistente fra direzione della perturbazione e direzione di propagazione: onde trasversali ed onde longitudinali
In base al loro stato: onde singole, viaggianti ed onde stazionarie.



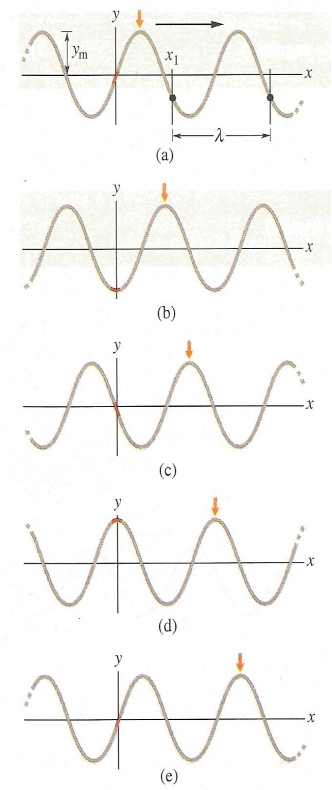






Inoltre nel caso delle onde elettromagnetiche, possiamo suddividerle in onde polarizzate linearmente ***s*** e ***p***, o circolarmente a secondo di come è diretto il campo elettrico

Altre caratteristiche delle onde



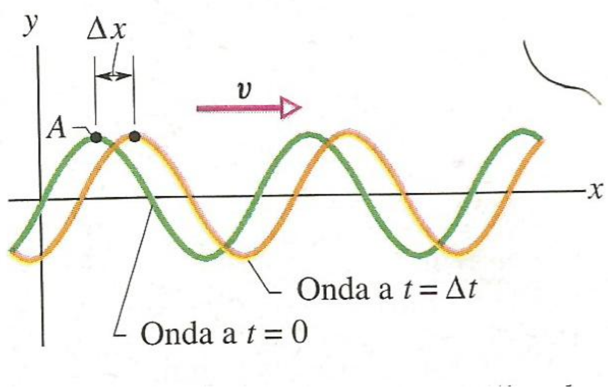
- Abbiamo già visto alcune caratteristiche delle onde, ora cercheremo di completarle.
- Supponiamo di avere a che fare con una corda che sia perturbata da un treno di impulso che si propaghi lungo la direzione delle x crescenti, quale sarà il moto della particella lungo l'asse y?

$$y(x,t) = y_m \sin(kx-\omega t) \qquad (*)$$

- Dalla figura si può notare che, il trattino rosso della corda, non si sposta lungo x. Esso si è solo mosso in su e giù lungo y.
- La lunghezza d'onda λ è la distanza fra due creste o fra due valli o fra due zeri dell'onda viaggiante.
- Il numero d'onda $\kappa = 1/\lambda$ *o anche* $\kappa = k/2\pi$ e k è definito numero d'onda angolare.
- Dall'equazione (*) possiamo vedere che agli estremi del periodo T il valore di $y(t_1) =.y_m \sin(\omega t_1)$ e di $y(T) = y_m \sin[\omega(t_1 + T)]$ sono eguali quando $\omega T = 2\pi$. Quindi $\boldsymbol{\omega = 2\pi/T}$ è la pulsazione

Velocità di propagazione delle onde

Supponiamo di avere una onda che viaggi con velocità ***v*** verso destra come in figura percorrendo una distanza Δx in un intervallo di tempo Δt . La velocità di propagazione è la velocità della forma, non del pezzetto di corda (la quale di fatto non si muove lungo x).



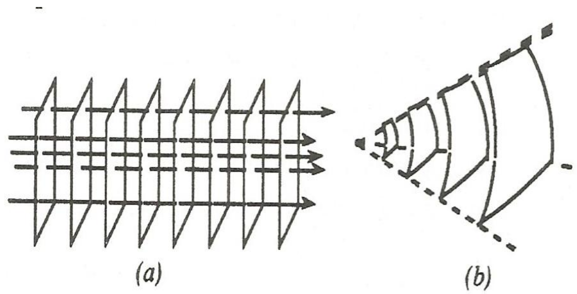
Quindi l'argomento del seno, cioè la fase, si deve conservare *kx – ωt = cost*, anche se, sia *x* che *t*,variano continuamente. Deriviando rispetto al tempo questa equazione si avrà *k dx/dt - ω = 0* ovvero *dx/dt* = *v* = *ω/k* e ricordando le definizioni ***k* = 2π/λ** e di ***ω = 2π/T***

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda \nu$$

L'onda percorre un lunghezza d'onda *λ* nel tempo di un periodo *T*

Raggi e fronti d’onda

- In figura sono riportati due fronti d’onda: il fronte d’onda piano (a) e il fronte d’onda sferico (b).
- Se il mezzo è omogeneo ed isotropo il fronte d’onda è sempre perpendicolare alla direzione di propagazione, (raggio dell’onda luminosa).



- Va da se che un fronte d’onda piano si ottiene quando c’è una approssimazione parassiale di un fronte d’onda sferico.
- I raggi di un fronte d’onda piano sono un fascio di rette parallele tra loro e perpendicolari ai fronti d’onda.
- I raggi di un fronte d’onda sferico sono una stella di rette tutte divergenti fra loro dello stesso angolo.
- Nel caso di fronti d’onda cilindrici i raggi sono paralleli in una direzione e divergenti nelle altre due

Propagazione lungo una corda tesa

Studiamo come si propaga il moto di una perturbazione trasversale esercitata su una corda elastica.

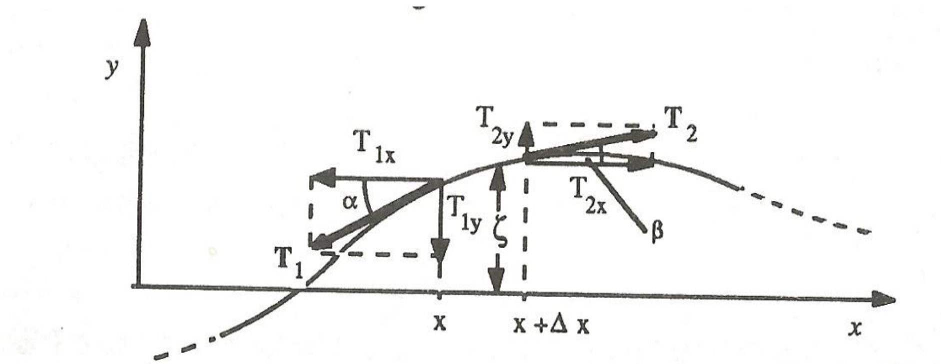
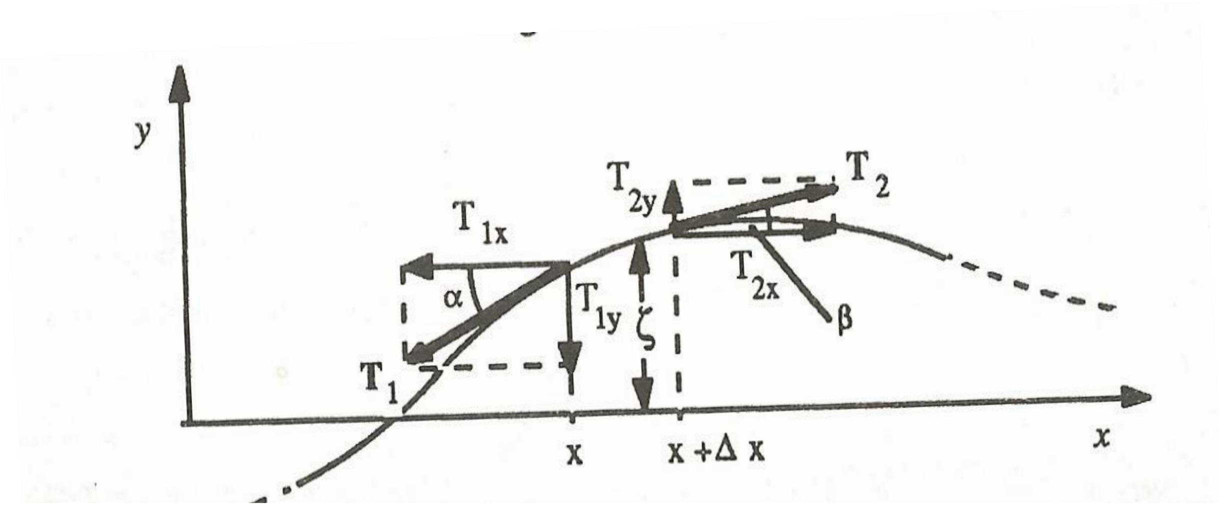


Figura 16.10 Tensioni agenti su un elemento di corda di lunghezza ds.

Ipotesi sul sistema corda:

1. Sia omogenea e la sua massa per unità di lunghezza sia μ.
2. Sia perfettamente elastica
3. La tensione della corda sia grande abbastanza per poter trascurare la forza di gravità.
4. Il moto della corda avvenga solo in direzione y, ($\perp$ alla direzione di propagazione x)
5. La deflessione e la pendenza siano piccole.

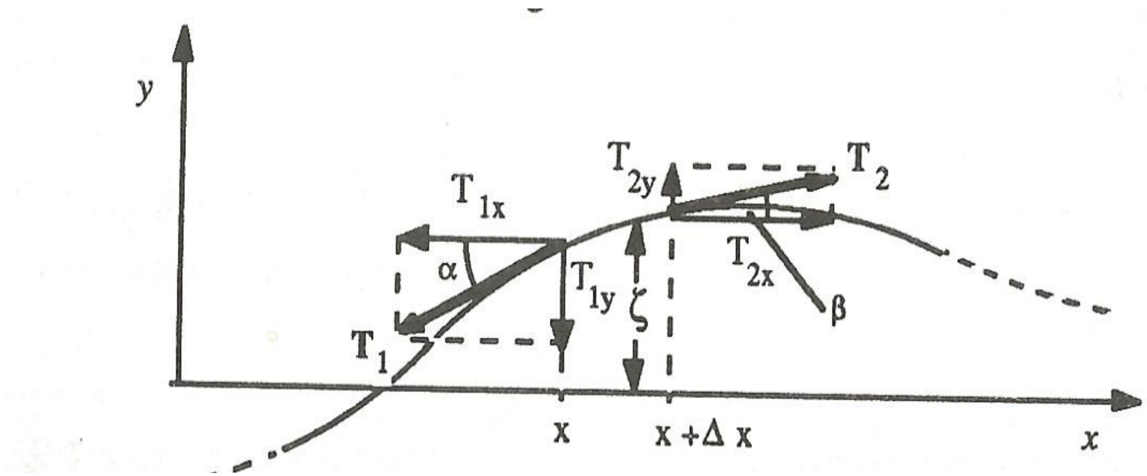
Ipotesi lungo una corda tesa



Consideriamo l'elemento di corda $(x+\Delta x) - x$.

- Indichiamo con T_1 e T_2 le tensioni agli estremi (vedi figura).
- Non essendoci accelerazione lungo x sarà $T_1 \cos\alpha = T_2 \cos\beta$ e per $\alpha = \beta$ piccoli $T_1 = T_2 = T$ e anche lungo y $T \sin\alpha$ (verso negativo) e $T \sin\beta$ (verso positivo).
- La $\Sigma F_y = ma$ sarà $T \sin\beta - T \sin\alpha = \mu\, \Delta x\, d^2\zeta/dt^2$ inoltre se α e β sono eguali e sono entrambi piccoli avremo che $\sin\alpha \,\underline{\sim}\, \tan\alpha$

Propagazione lungo una corda tesa



• dividendo per T l'equazione precedente avremo

$$\tan\alpha - \tan\beta = \Delta x\ (\mu/T)\ d^2\zeta/dt^2 \qquad (*)$$

dove riconoscendo che le tangenti sono le pendenze della corda in x e in Δx potremo scrivere $\tan\alpha = (\delta\zeta/\delta x)_x$ e $\tan\beta = (\delta\zeta/\delta x)_{x-\Delta x}$ quindi sostituendo in (*)

$$\frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)_x\right] = \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} \quad \text{e nell'ipotesi di } \Delta x \to 0 \qquad \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}$$

Velocità dell'onda vs. tensione e densità

- $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}$ descrive la propagazione di una perturbazione

ondulatoria nel caso di una corda di densità lineare μ e tesa da una tensione *T*, è possibile notare una forte somiglianza con l'equazione di una onda viaggiante come descritto precedentemente.

- La velocità di questa onda dipenderà da: $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$; cioè nella

propagazione di una onda elastica si dovrà tenere conto della natura fisica della corda, attraverso il valore di μ e della sua tensione *T*. La velocità della perturbazione che scorre lungo x non dipenderà dall'ampiezza della perturbazione, che invece si svolge lungo y.
Se la forma della perturbazione è armonica si potranno avere le relazioni che legano la velocità con le frequenza o con il periodo

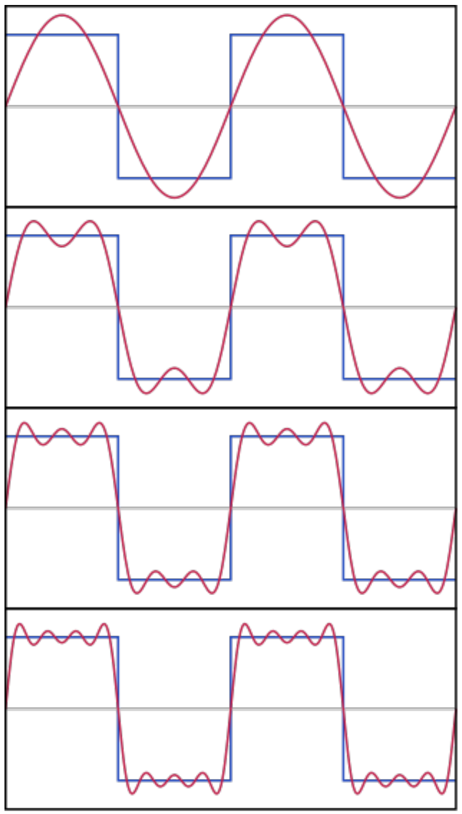
$\lambda = vT$ ovvero $\lambda/\sqrt{(T/\mu)} = T$

Principio di sovrapposizione

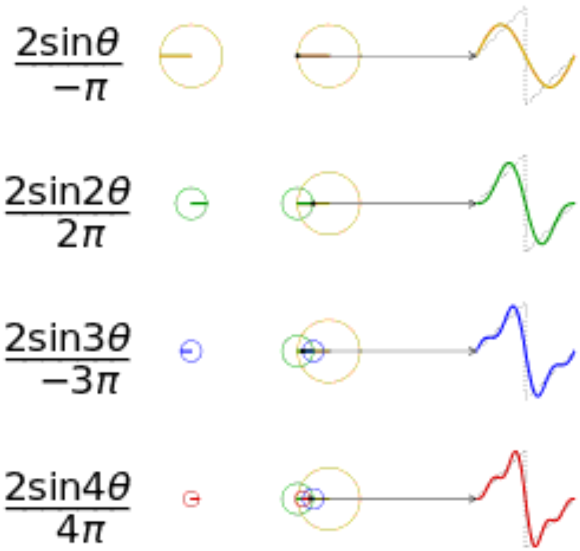
- L'equazione di d'Alembert è lineare ed omogenea e di conseguenza vale il principio di sovrapposizione; cioè se ζ_1, ζ_2… ζ_N sono ciascuna soluzione di dell'equazione d'onda.
- allora lo sono anche una qualsiasi combinazione lineare delle suddette.
- Questa caratteristica delle onde permette di analizzare una complicata forma d'onda come sovrapposizione di onde più semplici.
- Se le perturbazioni dei moti ondulatori sono grandi, non sono più governati dall'equazioni di d'Alembert e il principio di sovrapposizione viene meno.
- L'equazione di d'Alembert è generalizzabile allo spazio tridimensionale $\zeta\,(x,y,z,t)$ ed assume la forma

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} \qquad \boxed{\nabla^2\zeta=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}}$$

Teorema di Fourier



- Il teorema di **Fourier** asserisce che una qualunque funzione periodica può essere vista come una somma di infinite "opportune" funzioni sinusoidali (sin e cos).
- Questa caratteristica permette di scomporre funzioni complicate in una serie di funzioni che prende il nome di serie di Fourier che ne rendono l'analisi più semplice.



Dalla serie di Fourier discende anche la nozione di trasformata di Fourier o chiamata in altro modo analisi armonica

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_n \left[a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\right] = \sum_n c_n e^{int}$$