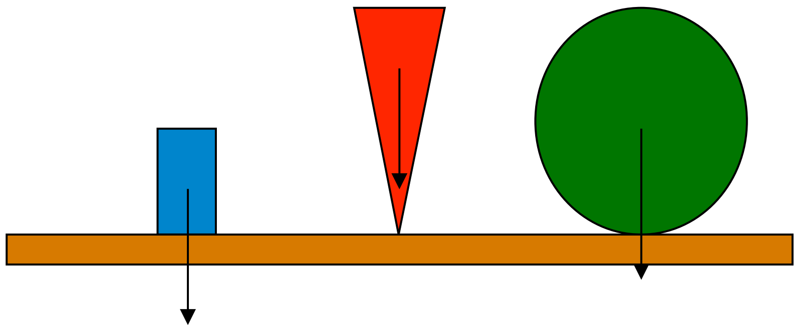
Equilibrio ed elasticità

Equilibrio

Baricentro

Elasticità

Esempi di equilibrio

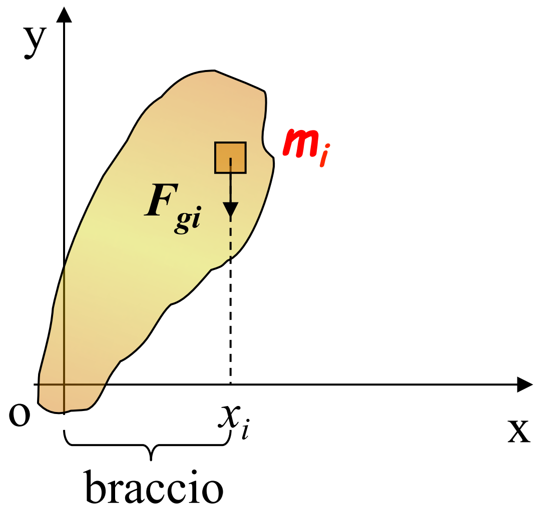


In figura sono riportati esempi di equilibrio statico

- Il parallelepipedo è in equilibrio ***stabile*** perché la forza di gravità ha una direzione che cade all'interno del poligono di appoggio. Per fargli cambiare configurazione sarà necessaria una grande perturbazione.
- Il cono è in equilibrio ***instabile*** perché poggia su una superficie formata da un solo punto e la forza di gravità passa per quel punto. Basterà una piccolissima perturbazione per fargli cambiare definitivamente configurazione.
- La sfera ha un equilibrio ***indifferente*** perché in qualunque posizione la direzione della forza di gravità passa nel punto di appoggio della sfera. Qualunque perturbazione non gli farà cambiare configurazione.

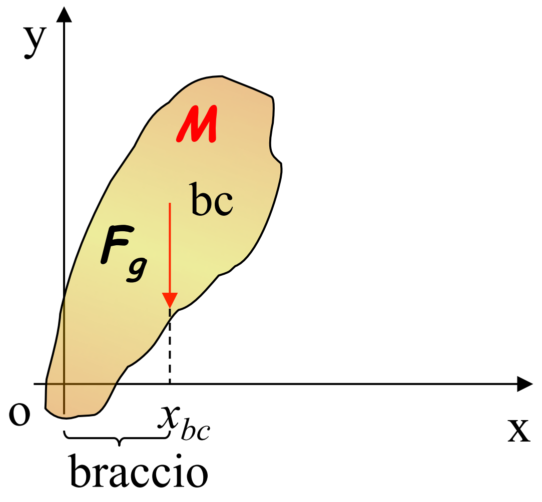
Il Baricentro

Se *g* è uguale per tutti i punti del solido allora il centro di massa coincide con il baricentro



Per ciascun punto $\boldsymbol{p} = (x_i, y_i)$ di massa m_i, il momento della forza $\boldsymbol{\tau}$, è:

$$\vec{\tau}_i = \vec{x}_i \times \vec{F}_i(g) \qquad \vec{\tau} = \sum \vec{\tau}_i = \sum \vec{x}_i \times \vec{F}_i(g)$$



Per il punto del c.m. posto in (x_{bc}, y_{bc}) di massa $\boldsymbol{M}$, il momento della forza $\boldsymbol{\tau}$, è:

$$\vec{\tau} = \vec{x}_{bc} \times \vec{F}(g) \Rightarrow \vec{x}_{bc} \times \sum \vec{F}_i(g)$$

Requisiti per l'equilibrio

Un corpo è in equilibrio se i vettori ***quantità di moto p*** e il ***momento della quantità di moto L***,sono entrambi costanti

$$\vec{F} = \left.\frac{d\vec{p}}{dt}\right|_{\vec{p}=\mathrm{cost}} \Rightarrow \sum \vec{F}_{ext} = 0 \quad (1)$$

$$\vec{\tau} = \left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_{\vec{L}=\mathrm{cost}} \Rightarrow \sum \vec{\tau}_{ext} = 0 \quad (2)$$

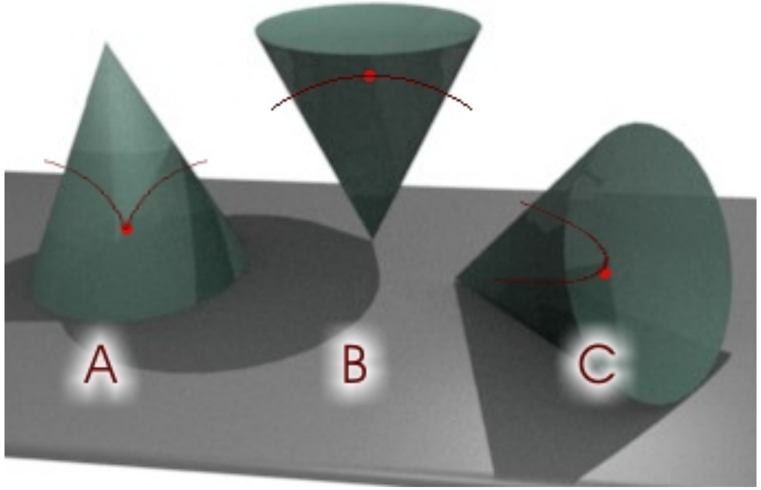
- La somma vettoriale di tutte le forze esterne agenti su un corpo deve essere nulla
- La somma vettoriale di tutti i momenti delle forze esterne agenti su un corpo, rispetto ad un punto arbitrario, deve essere nulla.

Non equilibrio

Possiamo dire che un corpo rigido non è in equilibrio se una delle due condizioni risultasse verificata:

$$\sum \vec{F}^{est} \neq 0$$

$$\sum \vec{\tau}^{est} \neq 0$$

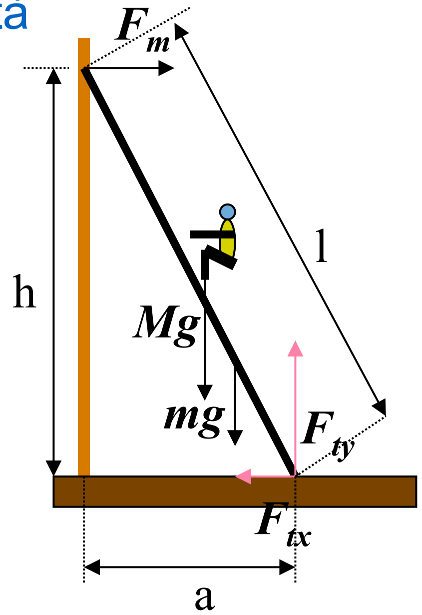


Se si verificasse la prima condizione, cioè se $\Sigma_i F_i \neq 0$ allora il corpo è sottoposto ad una forza esterna e il moto è accelerato:
tutti i punti del corpo solido si muovono con moto accelerato. La condizione $\Sigma_i \tau_i = 0$ impone che il moto sia solo *traslatorio*.

Se invece la seconda condizione non fosse verificata cioè se $\Sigma_i \tau_i = 0$ allora il corpo sarebbe fuori dall'equilibrio, anche se $\Sigma_i F_i = 0$. Potrebbe esserci una *coppia di forze* in grado di generare una rotazione attorno ad un asse.

Esempi di equilibrio statico

Una scala lunga l =12 m che pesa 12 kg è appoggiata, senza attrito, ad un muro all'altezza di 9,3 m. Il c.m. della scala si trova ad 1/3 dalla base ed il pompiere che pesa 72 kg si trova a metà della scala.



Soluzione: per avere equilibrio, il momento delle forze e la somma delle forze esterne devono essere nulle

$$\Sigma\underline{\tau} = 0 \qquad \Sigma\underline{F}_{ext} = 0$$

Quindi decidere il punto attorno a cui calcolare i momenti e scrivere la relazione dei momenti delle forze:

$$-F_m \cdot h + Mg(a/2) + mg(a/3) = 0$$

$$F_m = \frac{ga(M/2 + m/3)}{h}$$

Inoltre bisogna scrivere le relazioni dell'equilibrio delle forze

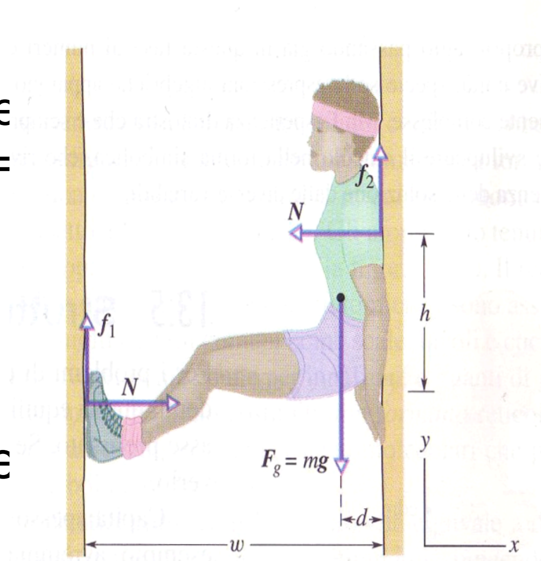
$$F_{tx} = F_m$$

$$F_{ty} - Mg - mg = 0$$

$$F_{ty} = g(M + m)$$

Esempi di equilibrio statico (2)

Una scalatrice riposa in un camino. Supponiamo una scalatrice di 55 kg, che debba procedere lungo un camino di larghezza w = 1m, che il c.m. si trovi a 20 cm dalla parete di appoggio e che i coefficienti di attrito siano μ_1 =1.1 e μ_2 = 0.7. Quale è la condizione di riposo per la scalatrice?



La somma delle forze deve essere nulla cioè

$$\boldsymbol{f_1 + f_2 - mg = 0}$$

ma le $\boldsymbol{f_1}$ e $\boldsymbol{f_2}$ sono legate alla normale $\boldsymbol{N}$ $\boldsymbol{f_1 = \mu_1 N}$ e $\boldsymbol{f_2 = \mu_2 N}$ con $\boldsymbol{N}$ (forza dei muscoli dell'alpinista) pari a $\boldsymbol{N = mg/(\mu_1 + \mu_2)}$.

Le forze non agiscono lungo lo stesso asse quindi potrebbero ruotare. Ciò non avverrà se $\boldsymbol{\Sigma\tau = 0}$. Calcolando tutti i momenti rispetto alla spalla troveremo che $\boldsymbol{N}$ e $\boldsymbol{f_2}$ hanno momenti nulli:

$$\boldsymbol{-wf_1 + hN + dmg = 0} \qquad \boldsymbol{h = (f_1 w - mgd)/N = \mu_1 w - mgd/N}$$

La scalatrice aggiusterà le sue spalle, le sue mani e i suoi piedi in modo da minimizzare lo sforzo muscolare