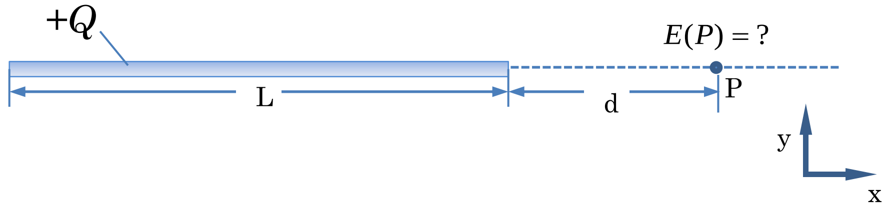
Esempio: Campo elettrico lungo l'asse di una sbarretta carica

Consideriamo una sbarretta di lunghezza L e carica $+Q$.
Determinare il campo elettrico, lungo l'asse della sbarretta ad una distanza d da una estremità

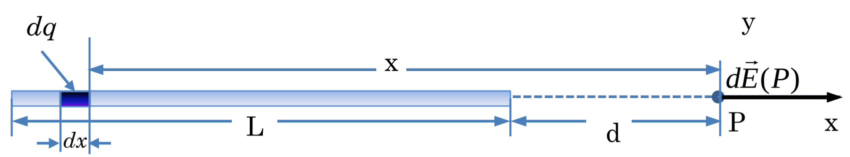
Possiamo immaginare la sbarretta divisa in un numero infinito di segmenti di lunghezza dx ciascuno avente una carica dq. L'elemento dx è sufficientemente piccolo da poter considerare la carica dq puntiforme



Ogni elemento dq contribuirà al campo elettrico in P con il suo campo elettrico $d\vec{E}$.

Se x è la distanza dell'elemento dq dal punto P

$$d\vec{E} = k\frac{dq}{x^2}\hat{x}$$



NB: poiché stiamo cercando il campo elettrico sull'asse x il problema è monodimensionale:

$$r \Rightarrow x$$
$$\hat{r} \Rightarrow \hat{x}$$

Per determinare il campo elettrico in P dobbiamo sommare il contributo fornito da ciascun elemento di carica dq

Dobbiamo sommare vettorialmente ciascun contributo $d\vec{E}$, che in questo caso è sempre diretto lungo l'asse x

$$d\vec{E} = (dE,0,0) \rightarrow \quad d\vec{E} \Rightarrow dE$$

$$\boxed{E = \int dE = \int k\frac{dq}{x^2}}$$

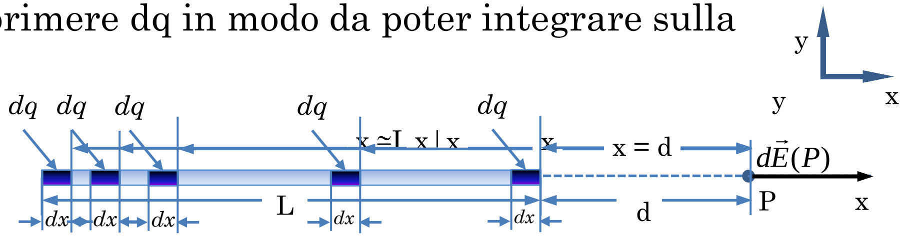
L'integrale scritto in questo modo non è di facile interpretazione, bisogna inserire gli estremi di integrazione che devono contenere la variabile rispetto alla quale integrare

Esempio: Campo elettrico lungo l'asse di una sbarretta carica (2)

$$\boxed{E = \int dE = \int k\frac{dq}{x^2}}$$

Qual'è la variabile da integrare? Cosa cambia per ogni elemento di carica?

Cambia la distanza x dal punto P, conviene quindi esprimere dq in modo da poter integrare sulla variabile x.



Poiché la carica +Q è distribuita uniformemente lungo la sbarretta ogni elemento dx conterrà la stessa frazione dq della carica totale

se n è il numero di elementi dx presenti in L, ogni elemento porterà una frazione dq=Q/n di c

$$\int_d^{d+L}\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\bigg|_d^{l+d}$$

$$\boxed{dq = \frac{Q}{n} = \frac{Q}{(L/dx)} = Q\frac{dx}{L}}$$

$L = n\,dx \Rightarrow n = L/dx$

$$E = \int k\frac{dq}{x^2} = \int_a^b k\frac{Q}{L}\frac{dx}{x^2} = k\frac{Q}{L}\int_a^b \frac{dx}{x^2} = k\frac{Q}{L}\int_d^{d+L}\frac{dx}{x^2} = k\frac{Q}{L}\cdot -\frac{1}{x}\bigg|_d^{L+d} = k\frac{Q}{L}\cdot\left[-\frac{1}{L+d} - \left(-\frac{1}{d}\right)\right]$$

Gli estremi dell'integrazione (su x) corrisponderanno ai due estremi della sbarretta:
a => elemento che si trova sull'estremo destro della barretta (x=d)
b => elemento che si trova sull'estremo sinistro della barretta (x=d+L)

$$E = \frac{kQ}{d(L+d)}$$

Forma vettoriale

$$\vec{E} = \frac{kQ}{d(L+d)}\hat{x}$$

NB: Nel caso in cui la distanza d dalla barretta è molto più grande della lunghezza L della barretta stessa … L può essere trascurato e ci si ritrova nel caso di un campo generato da una carica puntiforme

$$E_{dis} = \lim_{d>>L}\frac{kQ}{d(L+d)} = \frac{kQ}{d(\underbrace{L}_{\approx 0}+d)} = \frac{kQ}{d^2}$$

Moto di particelle cariche in un campo elettrico

Quando una particella di carica q e massa m è posta all'interno di campo elettrico $\vec{E}$, la forza elettrica che agisce sulla carica è:

$$\boxed{\vec{F}_e = q\vec{E}}$$

E se questa è l'unica forza agente sulla carica, essa è la forza risultante, e per il secondo principio della dinamica la carica subirà un'accelerazione $\vec{a}$ legata alla forza elettrica dalla relazione:

$$\boxed{\vec{R} = m\vec{a} = q\vec{E}}$$

L'accelerazione che subisce la carica è quindi

$$\boxed{\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}}$$

Se il campo è uniforme (cioè costante in modulo direzione e verso), l'accelerazione è costante, diretta lungo il campo elettrico se q>0 o in verso opposto se q<0.

$$\boxed{\vec{E}\ \text{uniforme} \quad \Rightarrow \vec{a} = \text{costante}}$$

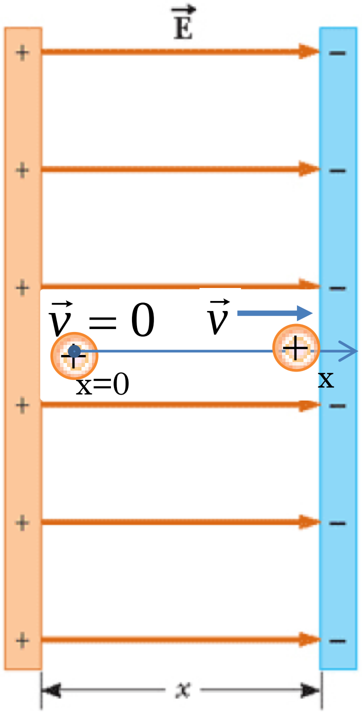
Moto di particelle cariche in un campo elettrico uniforme

$$\boxed{\vec{F}_{tot} = m\vec{a} = q\vec{E}}\qquad\qquad \boxed{\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}}$$

1) Particella di carica q e massa m inizialmente in quiete:

Inserita all'interno di un campo elettrico uniforme si muoverà con accelerazione costante lungo una retta parallela ad $\vec{E}$.
Facciamo coincidere l'origine degli assi con la posizione iniziale della particella ed x con la direzione del campo elettrico. Si avrà (eq. del moto di un moto rettilineo uniformemente accelerato:

$$\boxed{a_x = \frac{q}{m}E \qquad v_x = a_x t = \frac{q}{m}Et \qquad x = \frac{1}{2}a_x t^2 = \frac{q}{2m}Et^2}$$



Eliminando t dalle espressioni si trova la relazione che lega v_x alla posizione x:

$$v_x = \frac{q}{m}Et \Rightarrow t = v_x\frac{m}{qE}$$

$$x = \frac{q}{2m}E\left(\underbrace{v_x\frac{m}{qE}}_{t}\right)^2 = v_x^2\frac{m}{2qE} \Rightarrow v_x^2 = x\frac{2qE}{m} \Rightarrow \boxed{v_x = \sqrt{2x\frac{q}{m}E}}$$

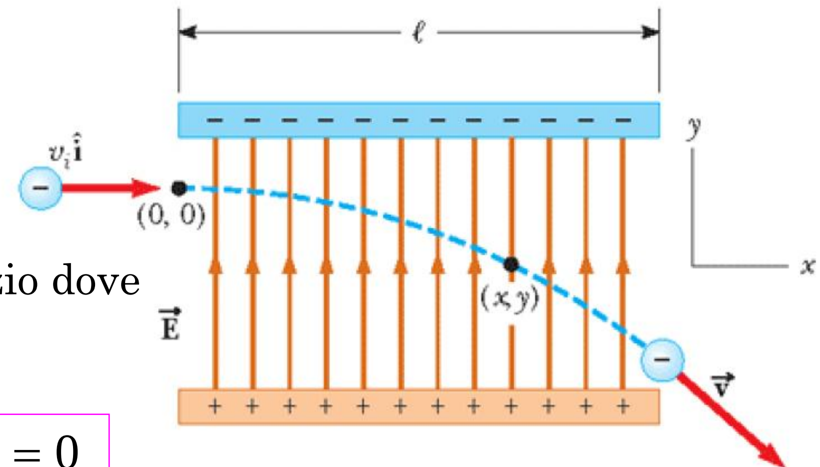
Moto di particelle cariche in un campo elettrico uniforme

1) Particella di carica negativa -q e massa m che entra in un campo elettrico E uniforme con velocità iniziale v_0 perpendicolare al campo elettrico.

Il moto è analogo a moto di un proiettile sotto l'azione del campo gravitazionale.
Facciamo coincidere l'origine degli assi con la posizione iniziale della particella e l'asse x con la direzione della velocità iniziale. Il campo sarà rivolto verso le y positive.

L'accelerazione che la particella carica subisce quando attraversa il campo è:

$$\vec{a} = -\frac{q}{m}\vec{E} = -\frac{q}{m}E\,\hat{j}$$



Se la velocità iniziale della carica è $\vec{v} = v_0\hat{i}$ le equazioni del moto della carica nella regione di spazio dove è presente il campo elettrico saranno:

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ v_x = v_0 \\ a_x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \frac{1}{2}at^2 = -\frac{q}{2m}Et^2 \\ v_y = at = -\frac{q}{m}Et \\ a_y = a = -\frac{q}{m}E \end{cases} \qquad \begin{cases} z = 0 \\ v_z = 0 \\ a_z = 0 \end{cases}$$

parabola

Moto che avviene sul piano xy, sostituendo $t=x/v_0$ in y *si ottiene:*

$$y = -\frac{qE}{2mv_0^2}x^2 \Rightarrow y \propto x^2$$

Dopo che la particella esce dal campo elettrico prosegue di moto rettilineo uniforme

Flusso di un campo vettoriale

Un campo elettrico prodotto da corpi carichi può essere determinato in due modi differenti:

1) Attraverso la legge di Coulomb

2) Attraverso l'applicazione della legge di Gauss (quando la distribuzione di cariche presenta qualche particolare simmetria come ad esempio la simmetria cilindrica o sferica)

La legge di Gauss è espressa in termini di Flusso del campo elettrico

- Il concetto di flusso è stato originariamente introdotto nella teoria dei fluidi, dove il flusso è legato al volume di fluido che attraversa una superficie nell'unità di tempo.

- Nel caso di fluidi ideali il flusso di un liquido attraverso un condotto è stazionario (la quantità di volume di liquido che attraversa una superficie è costante nel tempo).

- Questo concetto, espresso dall'equazione di continuità (vA=cost) spiega perché la velocità di un flusso d'acqua aumenta se si chiude parzialmente l'uscita del tubo per innaffiare.

- È possibile generalizzare il concetto di flusso (che indicheremo con Φ) in modo che possa avere un'applicazione più ampia.

- Immaginiamo che il flusso di un fluido in un condotto sia rappresentato da un campo vettoriale dove ciascun vettore rappresenta la velocità del fluido in una posizione specifica del tubo di flusso.

- Il flusso è proprio il prodotto tra l'intensità di ciascun vettore ed un piccolo elemento di area di superficie perpendicolare alla conduttura $\Longrightarrow$ $\Phi = vA_{\perp}$

- Questa operazione matematica può essere effettuata per un qualsiasi campo vettoriale

- Il Flusso di un campo vettoriale è **una grandezza scalare che dipende dal campo e dalla superficie rispetto alla quale viene calcolato.**

Esempi:

Tubo a raggi catodici

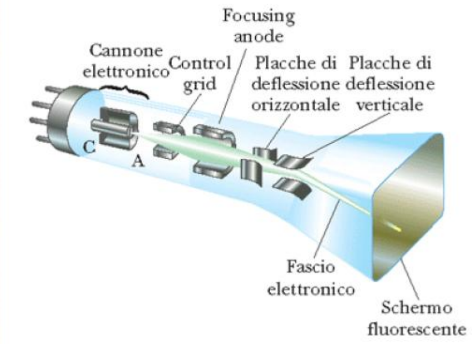


FIGURA 19.22 Disegno schematico di un tubo a raggi catodici. Gli elettroni lasciando il catodo caldo C sono accelerati verso l'anodo A. Oltre che per accelerare gli elettroni, il cannone elettronico è usato pure per focalizzare il fascio di elettroni, e le placche deflettono il fascio.

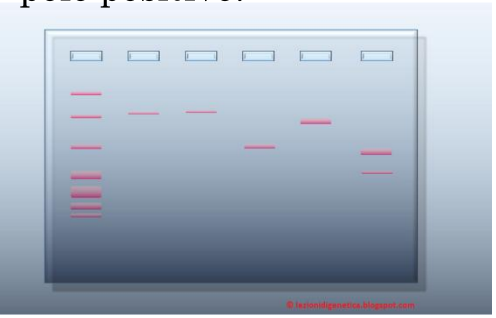
Elettroforesi:

L'elettroforesi è una tecnica di laboratorio che consente la separazione di frammenti di DNA o RNA (e non solo) in base alla loro grandezza.

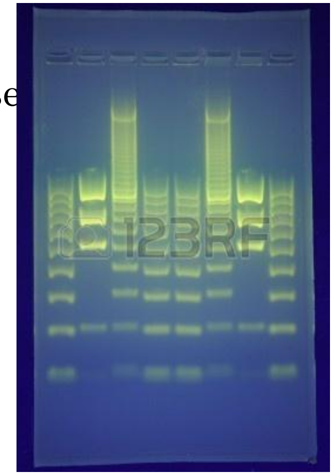
La tecnica sfrutta la diversa velocità di migrazione di molecole cariche sotto l'influenza di un campo elettrico.

Una molecola di DNA o di RNA possiede una **leggera carica negativa** (per via della presenza dei **gruppi fosforici)**.

Il DNA immerso in un gel (agarosio) nel quale scorra una corrente elettrica tenderà perciò a migrare verso il polo positivo.



Il gel in cui sono posti i campioni funge da setaccio; la rete di pori, di cui è costituito, consente di separare le molecole in base alla loro grandezza:
quelle più piccole attraversano più velocemente i pori rispetto a quelle più grandi
Si avrà quindi una separazione in funzione della velocità.

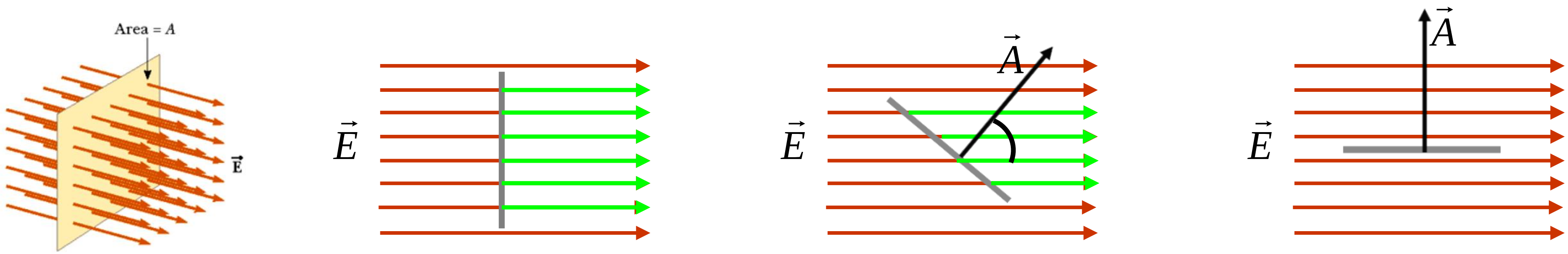


Rappresentazione schematica di elettroforesi su gel.
In alto i pozzetti(dove vengono caricati i DNA).
Nella prima corsia a sinistra si trova il marcatore (miscela di frammenti di DNA di varie dimensioni note che, separandosi durante la corsa elettroforetica, creano una scala di valutazione)
In tutte le altre corsie: i campioni di DNA hanno percorso una distanza diversa, a seconda della loro dimensione.

Flusso di un campo vettoriale

Per farsi un'idea intuitiva del concetto di flusso di un campo vettoriale si può ricorrere alle linee di forza (in analogia con le linee di flusso nella fluidodinamica): il numero delle linee che attraversano una superficie è proporzionale al flusso relativo a tale superficie.

NB: il flusso dipende dalla posizione della superficie rispetto alle linee di forza del campo



$\vec{A} =$ vettore superficie avente come modulo l'area della superficie e direzione perpendicolare alla superficie stessa

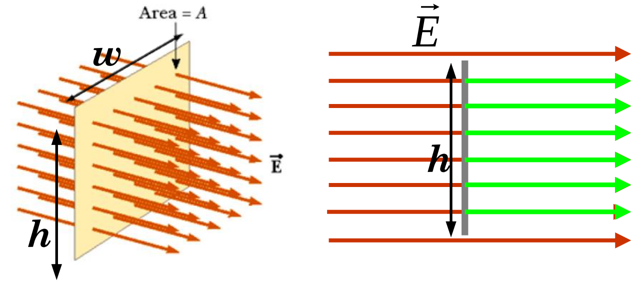
Partendo da una superficie perpendicolare alle linee di forza e ruotandola fino ad avere che la superficie risulti parallela al campo, un numero sempre minore di linee di forza attraverserà la superficie fino al punto che nessuna di esse attraverserà la superficie stessa (flusso nullo)

Definizione di flusso:

Il flusso Φ di un campo vettoriale $\vec{E}$ è una grandezza scalare che dipende dal campo e dalla superficie rispetto alla quale viene calcolato.

Flusso Elettrico di un campo elettrico uniforme

Consideriamo un campo elettrico uniforme $\vec{E}$ che passa attraverso una superficie A(area del rettangolo in figura, di altezza h e larghezza w) orientata perpendicolarmente al campo elettrico:



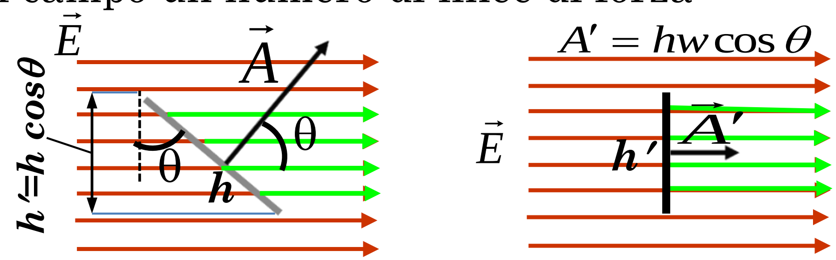
Si definisce: **flusso elettrico Φ la grandezza che rappresenta l'intensità del campo che attraversa l'area A**

$$\boxed{\Phi = EA}$$

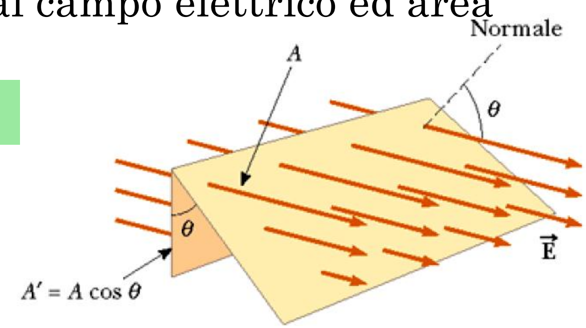
Φ descrive la quantità di campo, cioè di linee di forza che attraversano A.

Se ora si ruota la superficie rispetto alla direzione del campo un numero di linee di forza inferiori attraverseranno il triangolo.

Per tener conto di questa diminuzione in funzione dell'angolo tra le linee di forza e la superficie bisogna modificare la definizione di flusso



Si può notare che se h è l'altezza del rettangolo ruotato,
Il numero di linee di forza che passeranno attraverso A (=hw) è lo stesso di quelle che attraverseranno il rettangolo di altezza h'=$h\cos\theta$, perpendicolare al campo elettrico ed area $A' = hw\cos\theta = A\cos\theta$.



Il flusso del campo elettrico sarà quindi:

Prodotto scalare

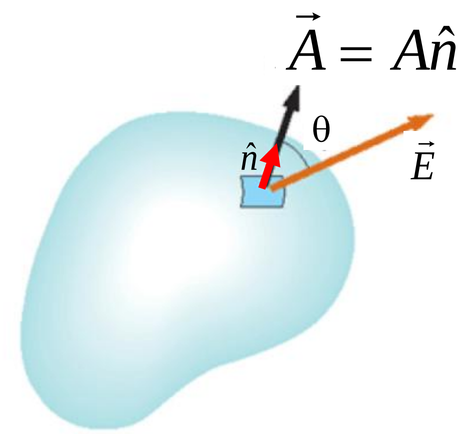
$$\boxed{\Phi = EA' = EA\cos\theta} \Rightarrow \boxed{\Phi = \vec{E}\cdot\vec{A}}$$

Flusso di un campo elettrico

Definizione formale di Flusso elettrico:

Sia A una superficie e $\vec{A}$ il vettore superficie avente come modulo l'area della superficie stessa e direzione perpendicolare alla superficie stessa (NB: Ci sono due possibili vettori superfici,uno per ogni faccia della superficie, nel caso di superficie chiusa, per convenzione il vettore $\vec{A}$ punta verso l'esterno).

Il flusso del campo elettrico $\vec{E}$ è definito come il prodotto scalar tra il campo elettrico ed il vettore superficie:



$$\boxed{\Phi = \vec{E} \cdot \vec{A}}$$

flusso del campo elettrico $\vec{E}$

L'unità di misura del flusso del campo elettrico è N ·m² /C $\Rightarrow$ $\boxed{[\Phi] = [N][m]^2[C]^{-1}}$

Proiezione di $\vec{E}$ su $\vec{A}$

Riscrivendo $\vec{A}$ in termini del versore normale $\hat{n}$:

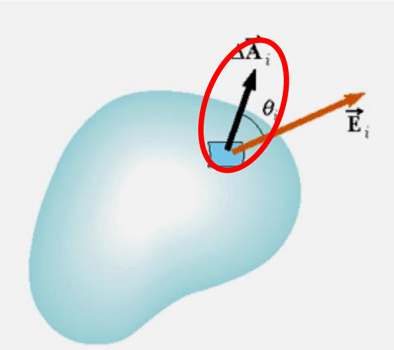
$$\boxed{\vec{A} = A\hat{n}} \Rightarrow \boxed{\Phi = A\vec{\mathrm{E}} \cdot \hat{n} = AE_n}$$

NB: se il campo è perpendicolare alla superficie A $\longrightarrow$ $\vec{\mathrm{E}} // \hat{n} \Rightarrow A\vec{\mathrm{E}} \cdot \hat{n} = AE$

se il campo è parallelo alla superficie A $\longrightarrow$ $\vec{\mathrm{E}} \perp \hat{n} \Rightarrow \vec{\mathrm{E}} \cdot \hat{n} = 0 \Rightarrow \Phi = 0$

Flusso Elettrico

Nel caso più generale il campo elettrico può variare sia in intensità che direzione e verso. La definizione di flusso data in precedenza vale solo se l'elemento di superficie A è sufficientemente piccolo da poter considerare che il campo in essa possa essere considerato costante.



Consideriamo una generica superficie suddivisa in un gran numero di piccoli elementi ciascuno di area ΔA nel quale il campo E possa essere considerato costante.

Per ogni elemento di superficie *i* si avrà un vettore superficie $\Delta\vec{A}_i$ di modulo ΔA e direzione perpendicolare all'elemento di superficie *i-simo*.

Il flusso del campo elettrico attraverso l'elemento *i-simo* di superficie sarà:

$$\boxed{\Delta\Phi_{E\,i} = \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{A}_i = E_i \Delta A \cos\theta_i}$$

Sommando tutti i flussi del campo attraverso i vari $\Delta\vec{A}_i$ otteniamo il flusso totale facendo tendere ad infinito il numero di elementi di superficie otteniamo:

$$\boxed{\Phi_E = \sum \Delta\Phi_{E_i}} \quad \xrightarrow[\Delta A\to 0]{\lim} \quad \boxed{\Phi_E = \lim_{\Delta A\to 0}\sum \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{A}_i = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int_S \vec{E}\cdot\hat{n}\,dA}$$

$$\boxed{\Phi_E = \int_S \vec{E}\cdot\hat{n}\,dA} \quad \Rightarrow$$

Integrale di superficie, dipende quindi dalla forma della superficie considerata

NB: Φ_E dipende sia dalla configurazione del campo che dalla superficie in cui viene calcolato

Flusso attraverso una superficie chiusa

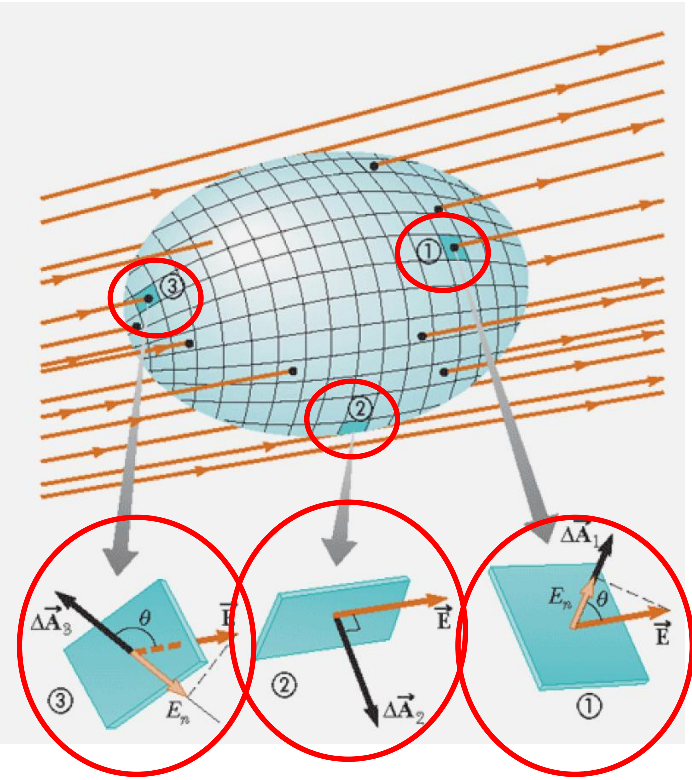
Di solito quello che si chiede di calcolare è il flusso del campo attraverso una superficie chiusa (cioè una superficie che divide lo spazio in due regioni una interna ed una esterna alla superficie)

Consideriamo la superficie in figura:

I vettori $\Delta\vec{A}_i$ sono rivolti in direzioni diverse per elementi di superficie diversi.

In ogni punto i vettori $\Delta\vec{A}_i$ sono perpendicolari alla superficie

Per convenzione hanno verso uscente dalla superficie.



Nel caso 1 il campo elettrico è uscente dalla superficie ($\theta_1<90°$) => il flusso è positivo

Nel caso 2 le linee di campo sono parallele alla superficie ($\theta_2=90°$) => flusso è nullo

Nel caso 3 le linee di campo sono entranti nella superficie ($180°>\theta_3>90°$) => il flusso è negativo

Poiché il flusso totale è una somma algebrica, il flusso totale attraverso la superficie chiusa è proporzionale al numero di linee di forza che escono dalla superficie meno il numero di linee di forza che entrano nella superficie.

$\Phi_E>0$ se $N_{\text{linee uscenti}} > N_{\text{linee entranti}}$
$\Phi_E<0$ se $N_{\text{linee uscenti}} < N_{\text{linee entranti}}$
$\Phi_E=0$ se $N_{\text{linee uscenti}} = N_{\text{linee entranti}}$

$$\boxed{\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot\hat{n}\,dA = \oint E_n\,dA}$$

E_n = componente del campo elettrico normale alla superficie dA

Teorema di Gauss (1)

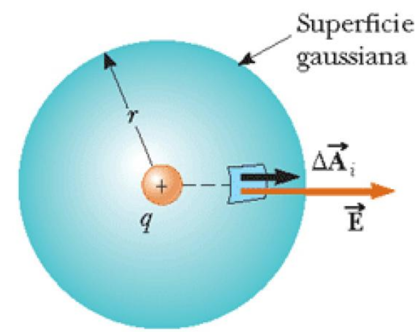
- Il teorema di Gauss mette in relazione il flusso di un campo elettrico attraverso una superficie chiusa e la carica in essa contenuta.

- Il teorema di Gauss si ricava a partire da una superficie sferica, ma il risultato è del tutto generale e vale per ogni superficie chiusa.

- Consideriamo una sfera di raggio r ed una carica positiva q posta al centro della sfera stessa.

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}}$$

Campo elettrico su un qualsiasi punto della superficie della sfera



- Le linee di campo sono radiali ed hanno verso uscente => perpendicolari alla superficie della sfera in ogni punto

- Definito un qualsiasi elemento ΔA_i della superficie le linee di campo sono parallele alla normale di ΔA_i

- Il flusso attraverso l'elemento di superficie i-simo sarà: $\boxed{\Delta\Phi_{E\,i} = \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{A}_i = E_i \Delta A_i}$

- Il flusso totale attraverso la sfera sarà:

Il campo sulla superficie della sfera è costante

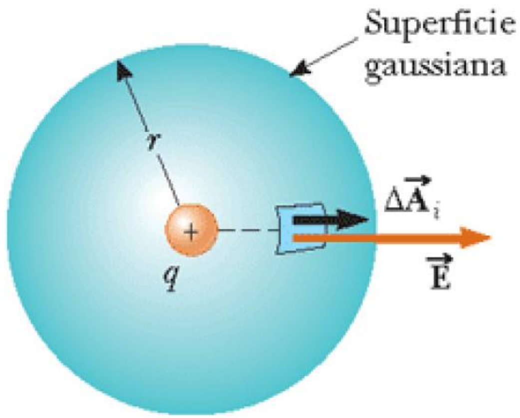
$$\Phi_E = \oint E_n dA = \oint E dA = E \oint dA = 4\pi r^2 E$$

Area totale della superficie chiusa => area della sfera = $4\pi r^2$

Teorema di Gauss (2)

NB: $\oint dA$ (cioè l'integrale su una superficie chiusa di un elemento di superficie) è proprio la superficie stessa: quindi in questo caso l'integrale è proprio la superficie della sfera (che vale $4\pi r^2$)

$$\oint dA = 4\pi r^2 \Rightarrow \quad \Phi_E = E\oint dA = 4\pi r^2 E$$



- Ricordando che $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}$ si ottiene:

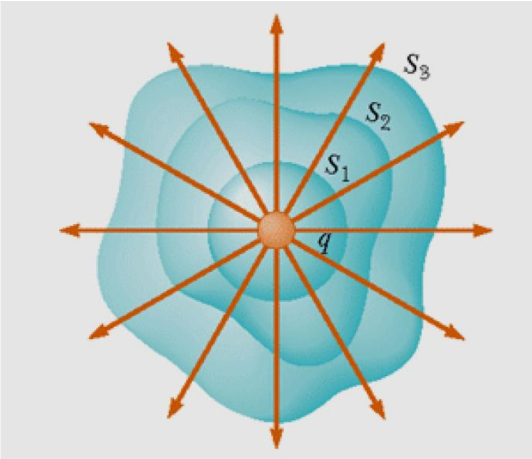
$$\Phi_E = 4\pi r^2 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \Rightarrow \boxed{\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

Il flusso totale di un campo elettrico generato da una carica q attraverso una sfera centrata in q è proporzionale alla carica q stessa ed indipendente dal raggio della sfera stessa

Teorema di Gauss (2)

Abbiamo trovato che nel caso di una superficie sferica ed una carica q puntiforme contenuta in essa il flusso del campo generato dalla carica attraverso la superficie della sfera è indipendente dal raggio della sfera e pari a :

$$\boxed{\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$



Quanto vale il flusso in caso di una superficie chiusa generica?

Consideriamo delle superfici chiuse che circondano una carica q (S1 sferica, S2 ed S3 non sferiche).

- Il flusso che attraversa la superficie S1 è pari a q/ε_0 .
- Il flusso è proporzionale al numero di linee di campo che attraversano la superficie
- Questo numero è uguale per le tre superfici

⇓

Il flusso totale attraverso una qualsiasi superficie non dipende dalla forma della superficie

⇓

Il flusso totale attraverso un qualsiasi superficie chiusa che circonda una carica puntiforme q ed è dato da

$$\boxed{\Phi_E = q/\varepsilon_0}$$

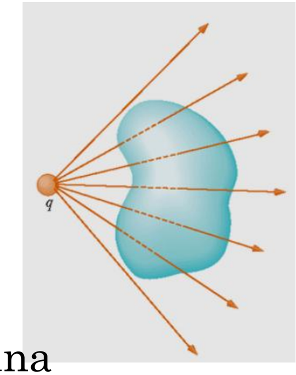
Potremmo scegliere una sfera che non ha la carica q al centro

⇓

Il flusso totale di un campo elettrico che attraversa una superficie chiusa è indipendente dalla posizione della carica all'interno della superficie

Teorema di Gauss (3)

Consideriamo ora una carica puntiforme q posta al di fuori di una superficie chiusa di forma arbitraria
Alcune linee di forza entrano nella superficie altre escono ma sempre:
Il numero di linee di forza che entrano è uguale al numero di linee di forza che escono.



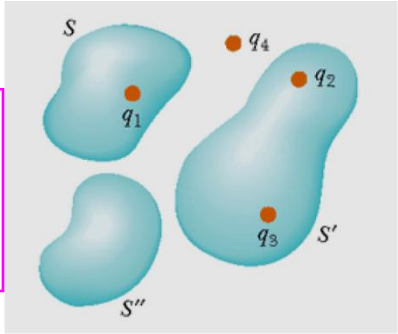
Il flusso totale di un campo elettrico attraverso una superficie che non contiene cariche è nullo

Estendiamo ora questi concetti al caso generale di più cariche puntiformi e di una distribuzione di carica
Il flusso attraverso una qualsiasi superficie è dato da:

$$\boxed{\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot\hat{n}dA = \oint\left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + ...\right)\cdot\hat{n}dA = \oint \vec{E}_1\cdot\hat{n}dA + \oint \vec{E}_2\cdot\hat{n}dA + .. = \Phi_1 + \Phi_2 + ..}$$

Il flusso elettrico attraverso una qualsiasi superficie è la somma dei flussi dovuta ai campi elettrici generati dalle singole cariche

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi = \oint_S \vec{E}\cdot\hat{n}dA = \frac{q_1}{\varepsilon_0}\\
&\Phi' = \oint_{S'} \vec{E}\cdot\hat{n}dA = \oint_{S'}\left(\vec{E}_2 + \vec{E}_3\right)\cdot\hat{n}dA = \Phi'_2 + \Phi'_3 = \frac{q_2 + q_3}{\varepsilon_0}\\
&\Phi'' = \oint_{S''} \vec{E}\cdot\hat{n}dA = 0
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot\hat{n}dA = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}}$$



Teorema di Gauss:
Il flusso elettrico totale attraverso una qualunque superficie chiusa è uguale alla carica totale contenuta all'interno della superficie divisa per ε_0

Applicazioni del teorema di Gauss a distribuzioni di carica simmetriche

Il teorema di Gauss è utile per determinare il campo elettrico generato da distribuzioni di carica che presentano una qualche simmetria spaziale.

$$\boxed{\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}} \xrightarrow{\text{Se S ha proprietà di simmetria}}$$

Enorme semplificazione nel calcolo dell'integrale

Poiché il teorema di Gauss è valido per qualsiasi superficie S si scelga, la scelta delle superfici gaussiane su cui calcolare il flusso deve essere effettuata in maniera appropriata, in modo da avvantaggiarsi della simmetria della distribuzione di carica al fine di estrarre E dall'integrale.

➡ La superficie da scegliere deve verificare una (o più) delle seguenti condizioni:

1) Il valore costate del campo sulla superficie deve essere dedotto dalla simmetria della distribuzione di carica (se E=cost sulla superficie lo posso tirare fuori dall'integrale e l'integrale si riduce semplicemente all'area totale della superficie in esame)

1) Il prodotto scalare tra il campo ed il vettore superficie $d\vec{A}$ si deve poter esprimere come un semplice prodotto algebrico (E dA) facendo in modo che E sia perpendicolare alla superficie ($\vec{\mathrm{E}} // \vec{A} \Rightarrow \vec{\mathrm{E}} \cdot \vec{A} = AE$)

2) Il prodotto scalare tra il campo ed il vettore superficie $d\vec{A}$ sia nullo, facendo in modo che $\vec{E}$ e $\vec{A}$ siano perpendicolari tra loro

4) Si deve poter dedurre che il campo è nullo su tutti i punti della superficie

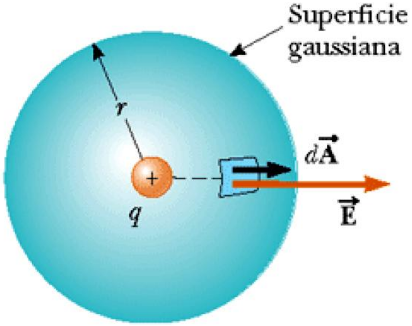
Attenzione:

differenti porzioni della superficie gaussiana posso soddisfare una diversa condizione tra le 4 elencate, purché ogni porzione rispetti almeno una di esse

Esempio: Campo elettrico generato da una carica puntiforme

Supponiamo di non conoscere il campo elettrico generato da una carica puntiforme positiva q e proviamo a ricavarlo a partire dal teorema di Gauss e da considerazioni di simmetria.

Poiché il teorema di gauss vale per ogni superficie, scegliamo quella che ci conviene di più: una sfera di raggio r centrata in q.



$$\boxed{\Phi_E = \oint_{sfera} \vec{E}\cdot\hat{n}dA = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}}$$

Il campo elettrico generato da una carica puntiforme positiva è radiale ed uscente dalla carica (la forza F che la carica esercita su una carica di prova q_0 posta in un punto dello spazio attorno a q è sempre diretta lungo la congiungente q con q_0).

⇨ $\vec{E} \,//\, d\vec{A}$ in ogni punto della superficie sferica (verificato il punto 2) ⇨ $\boxed{\vec{E}\cdot\hat{n}dA = E\,dA}$

Il teorema di Gauss ci dice che: $\Phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot\hat{n}dA = \oint_S E\,dA = \dfrac{q_{in}}{\varepsilon_0}$

⇨ il campo sarà uguale su tutta la superficie (verificato il punto 1) => posso tirare fuori E dall'integrale

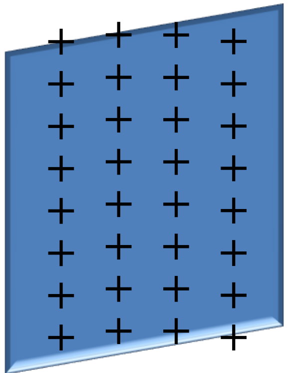
$\Phi_E = E\oint_S dA = \dfrac{q_{in}}{\varepsilon_0}$ dove l'integrale $\oint_S dA =$ area della superficie della sfera $= 4\pi r^2$

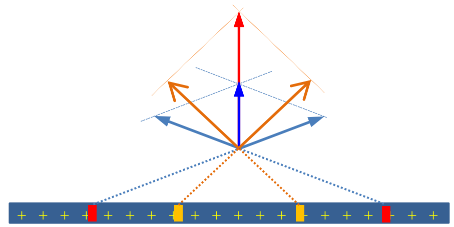
Si ha quindi che: $\Phi_E = E\cdot 4\pi r^2 = \dfrac{q_{in}}{\varepsilon_0}$ ⇨ $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_{in}}{r^2}$ ⇨ $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}$

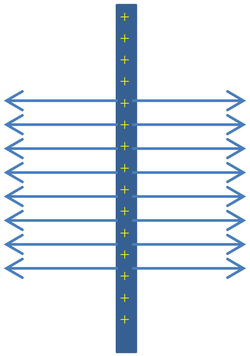
Poiché la carica totale presente nella sfera è q $q_{in}=q$

Campo elettrico in prossimità di una lamina piana carica

Consideriamo una lamina (di grandi dimensioni) piana con densità superficiale di carica σ uniforme.
Determinare il campo elettrico in un punto vicino alla lamina e lontano dai bordi della lamina stessa

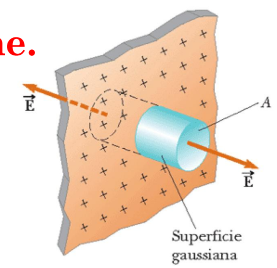






Determiniamo anzitutto la simmetria del campo in modo da poter scegliere la superficie gaussiana più opportuna per applicare il teorema di gauss:

Il campo elettrico, lontano dai bordi deve essere **perpendicolare alla lamina ed uniforme.**

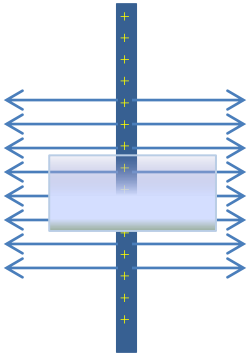


Poiché la lamina è carica positivamente il campo sarà **uscente dalla lamina**.

Sulle due facce della lamina i campi elettrici avranno quindi segni opposti.

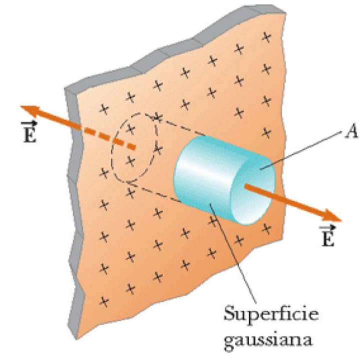
La superficie gaussiana che conviene scegliere è quella che riflette la simmetria del campo (parallelo alla normale alla lamina ed uscente da essa in entrambi i lati)

La superficie più conveniente sarà:
Una superficie cilindrica che attraversa la lamina, con asse perpendicolare alla lamina stessa e con le due basi, di area A, equidistanti dal piano carico.



Campo elettrico in prossimità di una lamina piana carica(1)

Superficie chiusa:
Cilindro come in figura (composto da una superficie laterale e due basi circolari)
Con questa scelta della superficie abbiamo che:



1 $\vec{E}$ // alla superficie laterale del cilindro $\Rightarrow$ $\vec{E} \perp$ alla normale alla superficie

Il flusso attraverso la superficie laterale è nullo

La superficie laterale del cilindro soddisfa la condizione 3 per la scelta della superficie Gaussiana.

2 $\vec{E} \perp$ alle due basi del cilindro => $\vec{E}$ // alla normale alle due superfici

$$\boxed{\vec{E} \cdot \hat{n} dA_{base} = E dA_{base}}$$

Le due basi soddisfano la condizione 2 per la scelta della superficie Gaussiana
Le due basi soddisfano anche la condizione 1 poiché il campo è uniforme

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{avanti} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{dietro} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{laterale} \underbrace{\vec{E} \cdot d\vec{A}}_{0} = \int_{avanti} EdA + \int_{dietro} EdA = E \underbrace{\int_{avanti} dA}_{A} + E \underbrace{\int_{dietro} dA}_{A} = 2EA$$

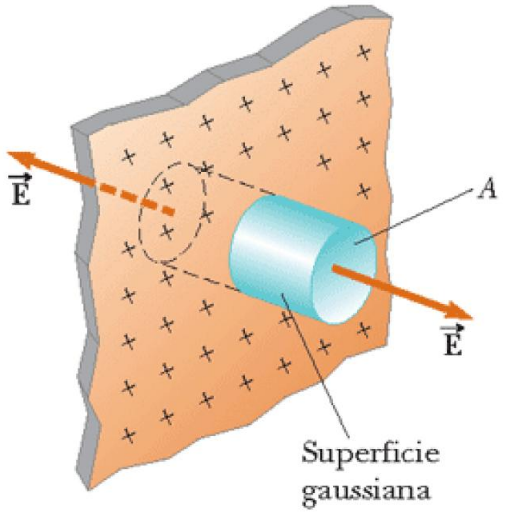
Il flusso totale attraverso l'intera superficie cilindrica sarà : $\Phi_E = 2EA$

Campo elettrico in prossimità di una lamina piana carica (2)

$$\Phi_E = 2EA$$

Per il teorema di Gauss

$$\Phi_E = 2EA = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{q_{in}}{2A\varepsilon_0}}$$

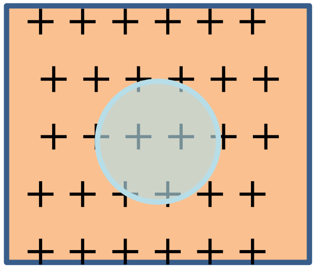


dove q_{in} è la carica racchiusa nella superficie cilindrica

Quanto vale q_{in}?

Sappiamo che la carica sulla lamina ha densità superficiale σ (carica per unità di superficie).

La superficie della lamina racchiusa nel cilindro di gauss è un disco di area A.



La carica totale racchiusa nel cilindro sarà quindi: $\boxed{q_{in} = \sigma A}$

Il campo elettrico generato da una lamina con densità superficiale di carica σ sarà quindi:

$$E = \frac{q_{in}}{2A\varepsilon_0} = \frac{\sigma A}{2A\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

campo elettrico generato da una lamina con densità superficiale di carica σ

NB: nel campo elettrico non compare la distanza dalla lamina. Si può quindi dedurre che $E=\sigma/2\varepsilon_0$ sia il campo elettrico a qualunque distanza dal piano => il campo è uniforme ovunque

Conduttori in equilibrio elettrostatico

In un conduttore le cariche (elettroni) sotto l'azione di un campo elettrico sono libere di muoversi all'interno del materiale.
Un conduttore si dice in equilibrio elettrostatico se le cariche sono tutte a riposo, cioè la forza elettrica risultante agente su ciascuna di esse è nulla.
Per un conduttore isolato da terra, in equilibrio elettrostatico valgono le seguenti proprietà:

1) Il campo elettrico all'interno del conduttore è nullo

2) Un qualsiasi eccesso di carica deve essere localizzato necessariamente sulla superficie esterna del conduttore

3) Il campo elettrico appena al di fuori del conduttore è perpendicolare alla superficie in ogni punto ed ha intensità pari a σ/ε_0 (dove σ è la densità di carica superficiale)

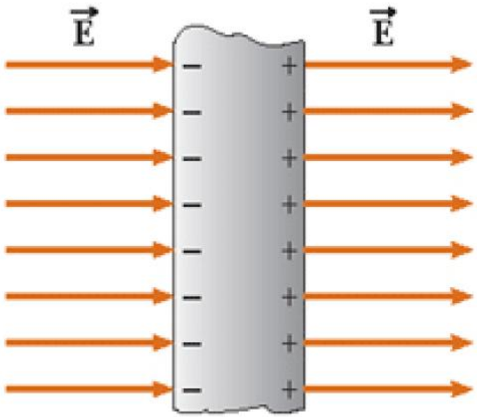
4) Su un conduttore di forma irregolare la carica si accumula sulle regioni di superficie con raggio di curvatura minore

Conduttori in equilibrio elettrostatico

1)Il campo elettrico all'interno del conduttore è nullo

Se così non fosse le cariche all'interno del conduttore verrebbe accelerate sotto l'azione della forza elettrica ed il conduttore non sarebbe quindi in equilibrio elettrostatico.
Ma perché il campo all'interno di un conduttore in equilibrio elettrostatico è nullo?

Consideriamo una lastra conduttrice neutra inserita in un campo esterno (come in figura).
Sotto l'azione del campo elettrico gli elettroni del conduttore, liberi di muoversi, si spostano verso sinistra creando un eccesso di cariche negative a sinistra ed un eccesso di cariche positive a destra.
Questa nuova configurazione di carica genera un campo elettrico interno al conduttore che si oppone al campo esterno.
Gli elettroni continueranno a spostarsi verso sinistra fin quando il campo interno non uguaglierà il campo esterno ed il campo totale all'interno del conduttore risulterà nullo



2) Un qualsiasi eccesso di carica deve essere localizzato necessariamente sulla superficie esterna del conduttore

Consideriamo di prendere una superficie gaussiana all'interno del conduttore
Il flusso attraverso tale superficie deve essere nullo in quanto il campo elettrico è nullo quindi in essa la carica totale è nulla.
Scegliamo la superficie interna al conduttore arbitrariamente vicina alla superficie anche in essa non ci saranno cariche in eccesso => tutta la carica in eccesso deve essere posizionata sulla superficie esterna del conduttore

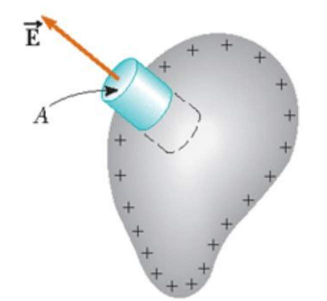
Conduttori in equilibrio elettrostatico

3)Il campo elettrico appena al di fuori del conduttore è perpendicolare alla superficie in ogni punto ed ha intensità pari a σ/ε_0 (dove σ è la densità di carica superficiale)

Utilizziamo ancora il teorema di Gauss.

➢Consideriamo un conduttore di forma generica e scegliamo come superficie gaussiana un cilindro che abbia le basi parallele alla superficie del conduttore con una delle basi interna al conduttore e l'altra appena al di sopra della superficie esterna.

➢Il campo elettrico è perpendicolare alla superficie
(se ciò non fosse la componente del campo lungo la superficie sarebbe diversa da zero.=> sotto l'azione di questa componente le cariche si muoverebbero sulla superficie ed il conduttore non sarebbe in equilibrio elettrostatico)



$\vec{E}$ // alla superficie laterale del cilindro $\Rightarrow$ $\vec{E} \perp$ alla normale alla superficie laterale

➢Il flusso attraverso la superficie laterale è nullo

➢Il flusso attraverso la superficie di base (quella interna al conduttore) è nullo perché E=0

➢Il flusso totale attraverso il cilindro è pari al flusso attraverso la superficie della base superiore (che è perpendicolare al campo ed in essa il campo è costante):

$$\Phi_E = \oint_s \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \int_A E dA = E \int_A dA = EA = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$ ma $q_{in}=\sigma A$ => $$EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$ ⇒ $$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

Energia potenziale elettrica

La forza elettrostatica è una forza conservativa. Possiamo quindi assegnare una energia potenziale elettrica al sistema di particelle cariche nel quale agisce la forza elettrostatica.

Se il sistema varia la sua configurazione da uno stato iniziale ad uno finale, la variazione di energia elettrostatica è pari al lavoro, cambiato di segno, della forza elettrostatica.

$$\boxed{\Delta U = U_f - U_i = -L}$$

Poiché l'energia potenziale elettrica è sempre definita a meno di una costante, si attribuisce energia potenziale nulla allo stato in cui le particelle sono a distanza infinita l'una dall' altra.

Consideriamo una carica puntiforme q_0 immersa in un campo elettrostatico $\vec{E}$.
La forza elettrica agente sulla carica sarà:

$$\vec{F}_e = q_0\vec{E}$$

$\vec{F}_e$ è una forza conservativa poiché è data dalla somma di forze conservative.

Quando la carica q_0 si muove soggetta al campo elettrico, il campo elettrico fa un lavoro sulla carica stessa.
Se consideriamo uno spostamento infinitesimo $d\vec{s}$ della caric q_0 il lavoro infinitesimo compiuto dal campo sarà: $dL = \vec{F}_e \cdot d\vec{s} = q_0\vec{E} \cdot d\vec{s}$

$$\boxed{\Delta U = U_f - U_i = -L = -\int_i^f dL = -q_0\int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}}$$

Integrale di linea.
Poiché il campo elettrico è conservativo, Questo integrale non dipende dal percorso effettuato dalla carica elettrica per andare dalla posizione iniziale alla posizione finale, ma dipende solo dallo stato i e dallo stato f

Potenziale elettrico

➢L'energia potenziale dipende dall' intensità della carica di prova.

$$\boxed{\Delta U = U_f - U_i = -q_0 \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}}$$

➢Si definisce quindi la grandezza **potenziale elettrico** *che è data dall' energia potenziale per unità di carica in una dato punto del campo elettrico.*

$$\boxed{V = U/q_0 = -\int_{-\infty}^{P} \vec{E} \cdot d\vec{s}}$$

Potenziale elettrico

➢Il potenziale è una proprietà del campo, che esiste indipendentemente dalla presenza o meno di una carica prova nel punto dello spazio in cui viene determinato.

➢**Il potenziale elettrico in un punto arbitrario P dello spazio è uguale al lavoro per unità di carica necessario per portare una carica positiva dall' infinito al punto P.**

➢**Il potenziale è una grandezza scalare ha dimensioni di un' energia su una carica e nel SI la sua unità di misura è il volt V:**

$$\boxed{[V] = [J][C]^{-1}}$$

➢*1V = 1J/C => Dato un campo elettrico ed una carica da 1C immersa in esso, bisogna svolgere un lavoro di 1J dall'esterno per spostare la carica elettrica tra due punti del campo che hanno una differenza di potenziale ΔV=1V*

➢*Elettronvolt: eV =1e ·1V=1.6 ·10^{-19} J*
Un elettronvolt è l'energia cinetica guadagnata da un elettrone accelerato attraverso una differenza di potenziale di 1 V
(oppure è il lavoro necessario a spostare un elettrone tra due punti nel campo che differiscono di 1 Volt)

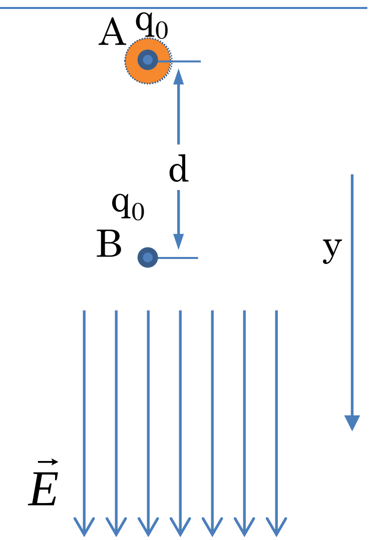
Differenza di potenziale elettrico

➢**Si definisce differenza di potenziale fra due punti A e B, la variazione di energia potenziale quando una carica di prova si muove tra i due punti, divisa per la carica di prova.**

$$\boxed{\Delta V = \frac{\Delta U}{q_0} = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s}}$$

Differenza di Potenziale

Differenza di potenziale in un campo elettrico uniforme:



➢Consideriamo un campo elettrico uniforme diretto lungo l'asse y negativo

➢La differenza di potenziale tra i due punti A e B separati da una distanza d (lungo la direzione delle linee di campo) è data da:

$ds \equiv dy$

$$\Delta V = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\int_{y_A}^{y_B} E\cos 0° ds = -E\int_{y_A}^{y_B} dy = -E\,y\Big|_{y_A}^{y_B} = -E(y_B - y_A) = -Ed$$

Il segno – è dovuto al fatto che $V_B < V_A$ (V=0 all'infinito)

NB: Le linee di forza in generale puntano verso una direzione a potenziale elettrico minore

➢Se una particella di carica q_0 si muove dal punto A al punto B la variazione di energia potenziale sarà:

$$\boxed{\Delta U = q_0\Delta V = -q_0 Ed}$$

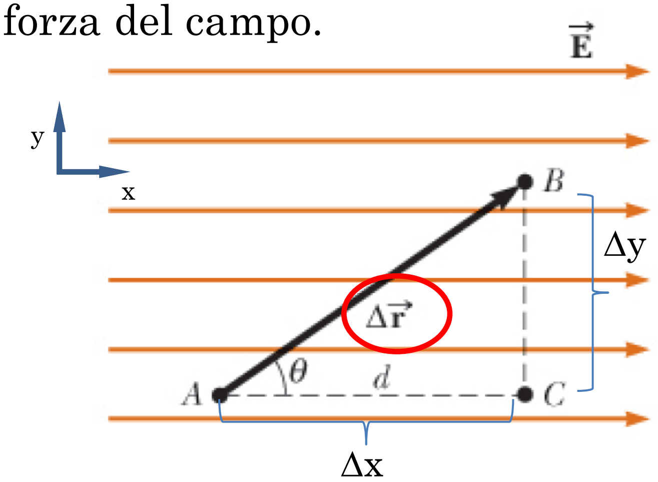
Differenza di energia potenziale in un campo elettrico uniforme su una carica q_0

Quando una carica positiva si muove nel verso del campo elettrico, l'energia potenziale elettrica del sistema carica-campo diminuisce (analogia con il campo gravitazionale)

Differenza di potenziale in un campo elettrico uniforme (continua)

Abbiamo visto che una particella di carica q_0 immersa in un campo elettrico che si muove lungo una linea di forza del campo da un punto A ad un punto B distanti tra di loro *d*, subisce una variazione di energia potenziale $\Delta U = -q_0 Ed$

Consideriamo ora una particella che si muove fra due punti qualsiasi A e B del campo.
Sia θ l'angolo tra la direzione dello spostamento e le linee di forza del campo.
La variazione di potenziale sarà data da:



$$\Delta V = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\vec{E}\cdot\int_A^B d\vec{s} = -\vec{E}\cdot\Delta\vec{r} = -E\Delta r\cos\theta$$

$$\int_A^B \underbrace{d\vec{s}}_{dx\,\hat{i}+dy\,\hat{j}} = \int_A^B \left(dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j}\right) = \int_{x_A}^{x_B} dx\,\hat{i} + \int_{y_A}^{y_B} dy\,\hat{j} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} = \Delta\vec{r}$$

NB: $\Delta r\cos\theta = \Delta x = d$ (dove d = distanza tra A ed il piano contenente B perpendicolare al campo) ➡ la componente Δy dello spostamento non porta contributo alla variazione di potenziale. Si ha infatti che $\vec{E} \perp \hat{j} \Rightarrow \vec{E}\cdot\Delta y\,\hat{j} = 0$.

Muovendosi lungo punti che giacciono su una superficie perpendicolare al campo non si ha variazione di potenziale elettrico (ΔV=0) ➡ queste superficie sono equipotenziali (hanno stesso potenziale)

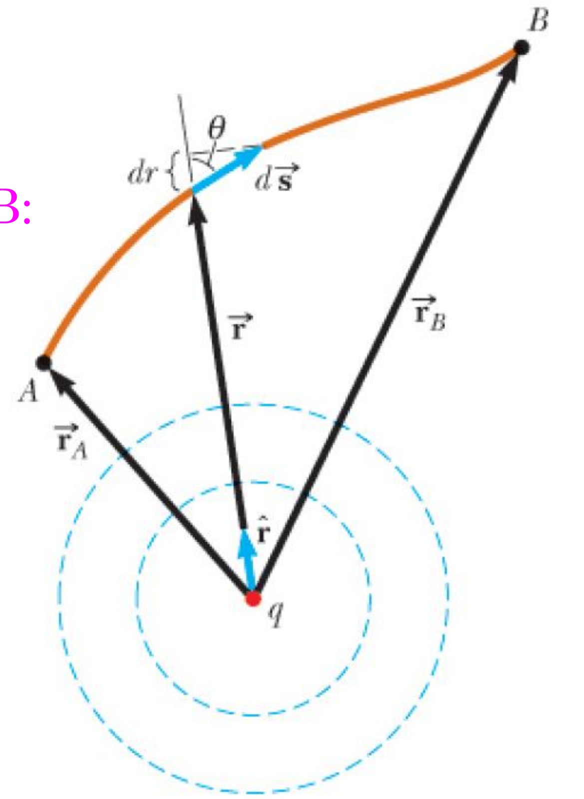
Poiché $U=q_0 V$ ➡ ***ΔU=–L=0*** ➡ per andare da un punto ad un altro su una superficie equipotenziale non si compie lavoro

Il lavoro per spostare una carica lungo una superficie equipotenziale è nullo ➡

$$\boxed{L = -\Delta U = q_0 \underbrace{\Delta V}_{0} = 0}$$

Potenziale elettrico per una carica puntiforme isolata

Consideriamo una carica puntiforme q positiva.
Il campo elettrico generato da questa carica è: $\vec{E} = k_c \frac{q}{r^2}\hat{r}$



Differenza di potenziale elettrico tra il punto A ed il punto B:

$$\Delta V = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\int_A^B k_c \frac{q}{r^2}\hat{r}\cdot d\vec{s}$$

Consideriamo l'argomento dell'integrale:

$\boxed{dr = ds\cos\theta}$

$$\vec{E}\cdot d\vec{s} = -k_c \frac{q}{r^2}\hat{r}\cdot d\vec{s} = -k_c \frac{q}{r^2} ds\cos\theta = -k_c \frac{q}{r^2} dr$$

Sostituiamo nell'integrale:

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_{r_A}^{r_B} k_c \frac{q}{r^2} dr = -k_c q\int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = k_c q \frac{1}{r}\bigg|_{r_A}^{r_B} = k_c q\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

L'integrale è indipendente dal percorso effettuato per andare da A e B e dipende solo dalle coordinate radiali di A e B (cioè dalle loro distanze dalla carica q che genera il campo)

Ponendo il potenziale a zero quando A→∞ si ottiene che il potenziale elettrico dovuto ad una carica elettrica in punto a distanza r da essa vale:

$$\Delta V = V - \underbrace{V_\infty}_{0} = V = -k_c q\int_\infty^r \frac{dr}{r^2} = k_c q\frac{1}{r}\bigg|_\infty^r = k_c q\frac{1}{r} \Rightarrow \boxed{V = k_c \frac{q}{r}}$$

potenziale elettrico dovuto ad una carica elettrica puntiforme in punto a distanza r da essa