Programma del corso
Fondamenti di Analisi Matematica
Corso di Laurea Triennale in Fisica - A.A. 2012/13

1. Nozioni di base su spazi normati, metrici e topologici.

Spazi normati, metrici e topologici. Topologia indotta da una metrica. Intorni. Spazi di Hausdorff. Chiusura. Caratterizzazione dei chiusi metrici tramite successioni. Nets e caratterizzazione della topologia tramite loro convergenza.

Limiti di funzioni e continuità in uno spazio topologico. Operatori limitati tra spazi normati. Norme topologicamente equivalenti, equivalenza di norme su spazi a dimensione finita.

Spazi metrici completi e spazi di Banach. $B(X,Y)$ è di Banach per Y di Banach. Estensione di operatori limitati densamente definiti. Completamento di spazi metrici e normati.

Non-compattezza della palla unitaria in spazi a dimensione infinita. Teorema di Heine-Borel. Spazi topologici compatti e loro caratterizzazione tramite net.

2. Richiami di teoria della misura e dell'integrazione.

Anelli, algebre, σ-algebre e misure su di essi. Insiemi elementari in $\mathbf{R}^n$ e loro misura. Misura esterna di Lebesgue e completamento della misura su un anello. Misure di Lebesgue e Lebesgue-Stieltjes. Boreliani. Misure regolari.

Spazi di misura e funzioni misurabili. Funzioni semplici. Definizione dell'integrale. Teoremi di convergenza monotona, di Fatou e di convergenza dominata. Confronto con l'integrale di Riemann. Spazi L^p come spazi di Banach. Densità delle funzioni continue.

3. Teoria elementare degli spazi di Hilbert.

Forme sesquilineari e prodotti scalari. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Spazi di Hilbert. Identità di polarizzazione e del parallelogramma. Esempi. Completamento di uno spazio prehilbertiano.

Ortogonali. Teorema della proiezione; proiettore su un sottospazio chiuso. Teorema di Riesz.

Sistemi e basi ortonormali. Caratterizzazioni delle basi ortonormali. Esistenza di basi ortonormali. Procedimento di Gram-Schmidt e spazi di Hilbert separabili.

Forme sesquilineari limitate e operatori. Aggiunto di un operatore.

4. Algebre di Banach e C*-algebre commutative.

Algebre di Banach e C*-algebre. Spettro di un elemento in un'algebra di Banach. Esempi.

Proprietà dello spettro. Teorema del raggio spettrale. Spettri di elementi normali, autoaggiunti, unitari, positivi di una C*-algebra. Spettro e trasformata di Gelfand di un'algebra di Banach commutativa.

Ideali propri. Quozienti di spazi normati rispetto a sottospazi chiusi e di algebre di Banach rispetto a ideali chiusi. Continuità dei caratteri di un'algebra di Banach. Spettro di un elemento di un'algebra di Banach commutativa e caratteri.

Teorema di Stone-Weierstrass.

Teorema di Gelfand-Naimark commutativo. Funtorialità contravariante dell'isomorfismo di Gelfand. Stabilità dello spettro per C*-sottoalgebre. Calcolo funzionale continuo. Estensione a C*-algebre senza identità. Cono degli elementi positivi di una C*-algebra.

5. Teoria spettrale per operatori su spazi di Hilbert.

Operatori positivi su uno spazio di Hilbert.

Calcolo funzionale boreliano. Misure spettrali. Teorema spettrale per operatori autoaggiunti limitati. Caratterizzazione degli elementi dello spettro tramite la misura spettrale. Versione del teorema spettrale con operatori di moltiplicazione (senza dim.).

Operator non limitati. Operatori chiusi. Aggiunto di un operatore e sua chiusura. Operatori hermitiani e autoaggiunti. Criterio fondamentale di autoaggiuntezza. Classificazione di von Neumann delle estensioni autoaggiunte (senza dim.). Spettro di un operatore non limitato.

Teorema spettrale e calcolo funzionale boreliano per operatori autoaggiunti non limitati (cenni). Generatore di un gruppo unitario fortemente continuo e teorema di Stone.

6. Stati e rappresentazioni di C*-algebre.

Contrattività di *-omomorfismi tra C*-algebre. Stati e rappresentazioni; teorema di Gelfand-Naimark-Segal. Teorema di Gelfand-Naimark. Stati puri e rappresentazioni irriducibili.

7. Applicazioni ai fondamenti matematici della Meccanica Quantistica.

Formulazione assiomatica della Meccanica Quantistica. Ensembles e procedure, stati e osservabili. Postulato C*. Commutatività dell'algebra delle osservabili in Meccanica Classica. Principio di Heisenberg generalizzato. Minimalità del supporto di uno stato puro e "variabili nascoste". Principio di sovrapposizione e regole di superselezione.

Sistemi con un numero finito di gradi di libertà. Relazioni di commutazione di Heisenberg e di Weyl. Realizzazione di Schroedinger delle relazioni di Weyl. Esistenza e unicità della C*-algebra di Weyl. Rappresentazioni regolari dell'algebra di Weyl. Regolarità e irriducibilità della rappresentazione di Schroedinger. Teorema di unicità di von Neumann. Quantizzazione di Wigner-Weyl.

Dinamica di un sistema quantistico come gruppo a un parametro di automorfismi. Implementazione unitaria della dinamica in stati stazionari. Hamiltoniana di un sistema quantistico. Equazioni del moto di Schroedinger e di Heisenberg.

Hamiltoniana della particella libera. Teorema di Kato-Rellich (senza dim.) e autoaggiuntezza dell'hamiltoniana atomica.

Vettori analitici. Teorema di Nelson. Autoaggiuntezza e spettro dell'hamiltoniana dell'oscillatore armonico.

Testi consigliati.

G. De Marco, *Analisi Due/1*, Zanichelli.
A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Elementi di Teoria delle Funzioni e di Analisi Funzionale,* Mir.
M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, vol. I-II*, Academic Press.
W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill.
G. K. Pedersen, *Analysis Now,* Springer.
J. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Springer.
F. Strocchi, *An Introduction to the Mathematical Structure of Quantum Mechanics,* World Scientific.
Note delle lezioni.