Campo elettrico $\vec{E}$

$$\boxed{\vec{E} = \overrightarrow{F_e}/q}$$ Campo elettrico

➢Il vettore campo elettrico $\vec{E}$ ha come unità di misura nel sistema SI il newton su coulomb (N/C)

$$\boxed{[E] = [N][C]^{-1}}$$

➢La direzione del campo è la stessa di quella di $\vec{F}$ (per convenzione la carica prova è positiva)

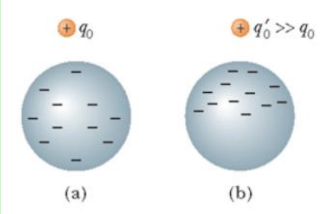
➢Il campo elettrico $\vec{E}$ è una proprietà dello spazio ed assume un suo valore in ogni punto dello spazio stesso

➢Esiste un campo elettrico in un certo punto, se una carica di prova q posizionata in quel punto subisce una forza elettrica

➢ Se Q è la carica sorgente del campo e q la carica di prova: **il campo elettrico esiste indipendentemente dalla presenza o meno della carica di prova (piccola)**

➢Definito il campo elettrico in un punto dello spazio, si ha che la forza esercitata su una carica q posta in quel punto è data da: $\boxed{\vec{F}_e = q\vec{E}}$

NB: Se la carica q non è sufficientemente piccola essa perturba il campo modificandolo

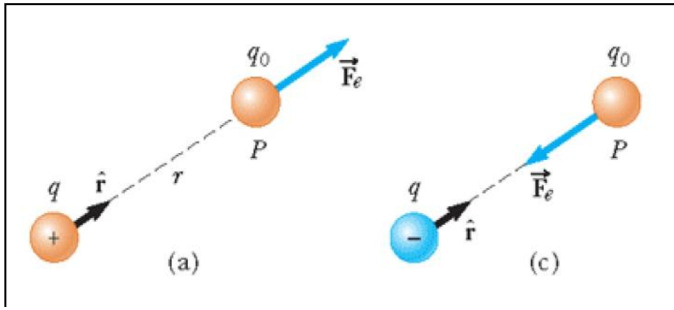


$$\frac{F_e'}{q_0'} \neq \frac{F_e}{q_0}$$

Campo Elettrico generato da una carica puntiforme

Consideriamo una carica q puntiforme posta ad una distanza r da una carica di prova q_0 (posta nel punto P come in figura).

Per la legge di Coulomb la forza esercitata da Q su q è pari a:



$$\boxed{\vec{F} = k\frac{qq_0}{r^2}\hat{r}}$$

dove $\hat{r}$ è il versore diretto da Q a q_0

Il campo elettrico generato da q nel punto P è quindi:

$$\boxed{\vec{E} = k\frac{q}{r^2}\hat{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}}$$

Campo elettrico generato da una carica puntiforme q

⇩

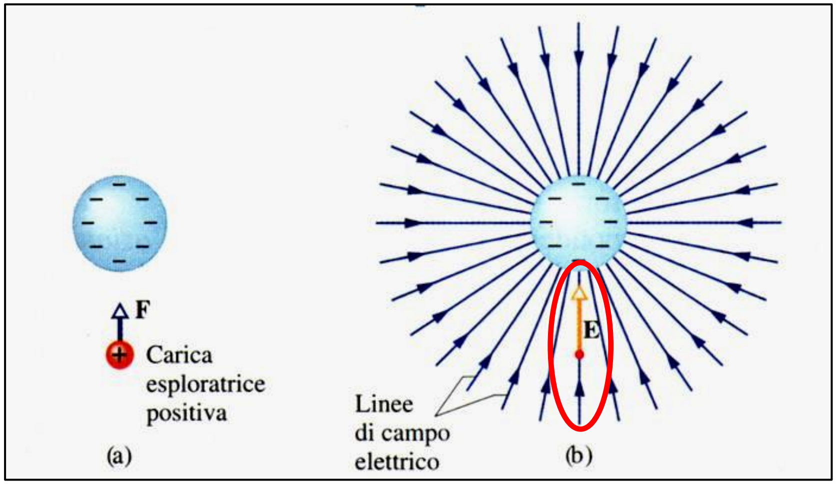
- Il modulo di E è proporzionale a $1/r^2$: $\boxed{\left|\vec{E}\right| \propto \frac{1}{r^2}}$
- Il modulo di E è proporzionale a q: $\boxed{\left|\vec{E}\right| \propto q}$
- Se la carica q è positiva il vettore campo è diretto radialmente in verso uscente da q (la forza che subisce la carica di prova q_0 è repulsiva) figura (b)
- Se la carica q è negativa il vettore campo è diretto radialmente in verso entrante nella carica q (la forza è attrattiva) figura (d)

Rappresentazione grafica di un Campo Elettrico:Linee di forza

Le linee di forza definiscono la direzione ed il verso dei campi elettrici in ogni punto dello spazio e rappresentano un buon metodo per visualizzare i campi elettrici.

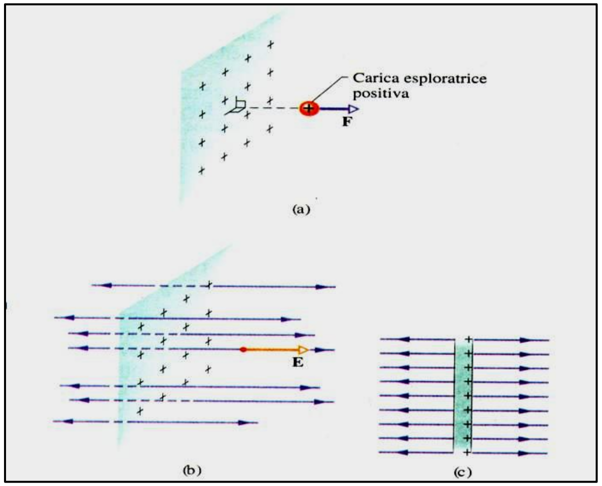
La relazione tra le linee di forza ed il campo elettrico è:

1) La direzione di una linee di forza o della tangente alla linea di forza(se curva) rappresenta la direzione del campo elettrico in quel punto
2) Il numero di linee di campo che attraversano una superficie unitaria normale ad esse è proporzionale all'intensità del campo elettrico (dove ci sono più linee di campo per unità di superficie il campo è più intenso
3) Le linee di forza escono dalle cariche positive ed entrano nelle cariche negative



Campo generato da una sfera carica negativamente

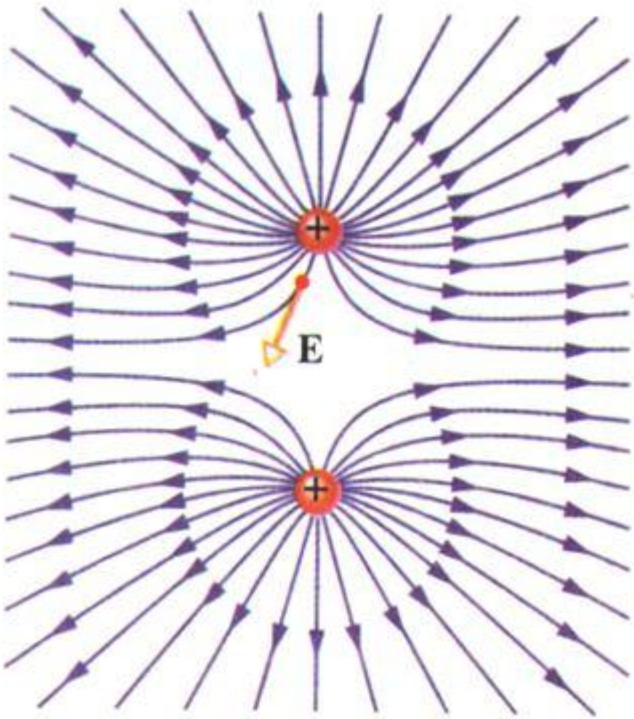
Le linee di forza sono distribuite radialmente intorno alla sfera carica negativamente.
Le linee di forza sono entranti (in quanto la carica è negativa) e sono più dense vicino alla distribuzione (dove il campo è più intenso, ricordiamo che $E \propto 1/r^2$)
La densità delle linee di forza quindi diminuisce allontanandosi dalla sfera



Campo generato da una lamina con una distribuzione di carica positiva uniforme

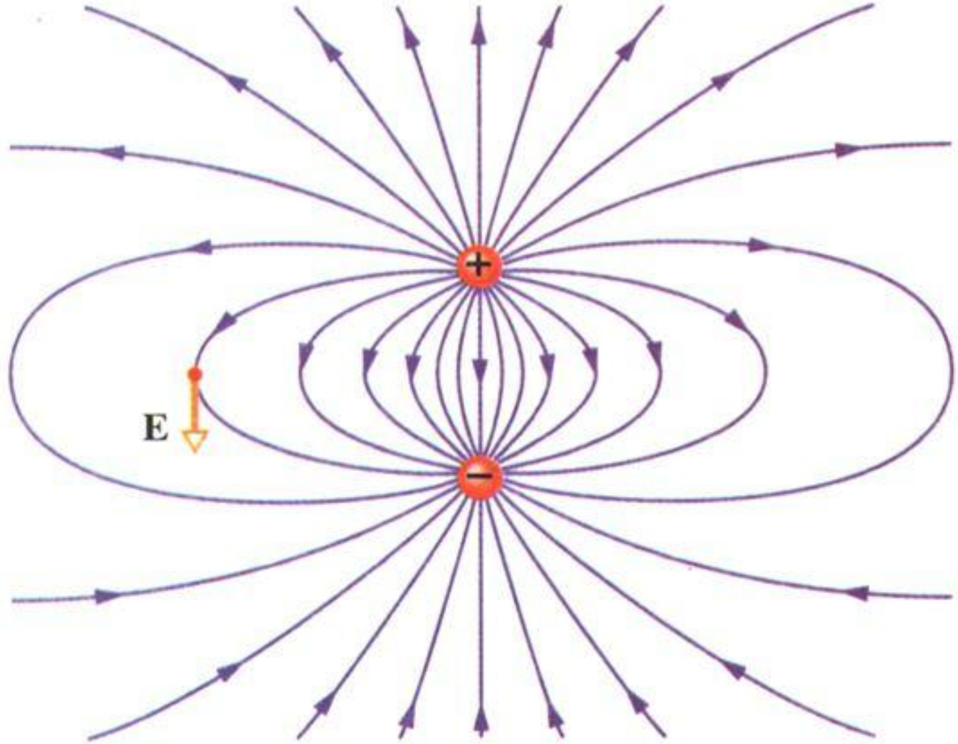
La forza elettrostatica netta dovuta alla distribuzione di cariche sulla superficie è perpendicolare alla lamina.
La forza elettrostatica è uscente dalla lamina (in entrambe le superfici della lamina)
Le linee di forza sono quindi perpendicolari alla lamina e poiché la carica è distribuita uniformemente sulla lamina esse hanno densità uniforme in quanto il campo elettrico è uniforme

Linee di forza del campo elettrico (2)



Campo generato da cariche uguali puntiformi positive

Le linee di forza non si chiudono (poiché le due cariche si respingono) ma terminano su oggetti lontani caricati negativamente
Questa distribuzione di linee di forza è in realtà tridimensionale e per immaginarlo pensate di ruotare l'immagine intorno all'asse passante per le due cariche



Campo generato da cariche uguali puntiformi ma di segno opposto (dipolo)

Le linee di forza si chiudono sulle cariche (in quanto le due cariche si attraggono)
Anche questa distribuzione di linee di forza è in realtà tridimensionale e per immaginarlo pensate di ruotare l'immagine intorno all'asse passante per le due cariche

Esempi

1)Supponiamo che su una particella di prova di carica q_0=81 nC venga esercitata una forza $\vec{F} = (2.7\mu N)\hat{i} + (1.1\mu N)\hat{j} + (1.3\mu N)\hat{k}$ da parte di un corpo carico.

Determinare il campo elettrico nel punto P dove è collocata la carica di prova:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{(2.7\mu N)\hat{i} + (1.1\mu N)\hat{j} + (1.3\mu N)\hat{k}}{81nC} = (33\,N/C)\hat{i} + (14\,N/C)\hat{j} + (16\,N/C)\hat{k}$$

2)Supponiamo che una particella di prova di carica q_0= -1.0 nC sia posta in un punto in cui risente di un capo: $\vec{E} = (56\,N/C)\hat{i} + (-37\,N/C)\hat{j} + (14\,N/C)\hat{k}$
Determinare la forza agente sulla particella q_0 in quel punto:

$$\vec{F} = q_0\vec{E} = -1.0nC \cdot \left[(56\,N/C)\hat{i} + (-37\,N/C)\hat{j} + (14\,N/C)\hat{k}\right] = (-56nN)\hat{i} + (37nN)\hat{j} + (-14nC)\hat{k}$$

NB: poiché la carica di prova è negativa, il campo elettrico e la forza hanno verso opposto

Campo elettrico dovuto ad un numero finito di cariche

Principio di sovrapposizione dei campi elettrici:

Il campo elettrico totale in un dato punto dello spazio, generato da un insieme finito di cariche, è uguale alla somma vettoriale dei campi elettrici in quel punto generati dalle singole cariche.

$$\boxed{\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = k \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i}$$

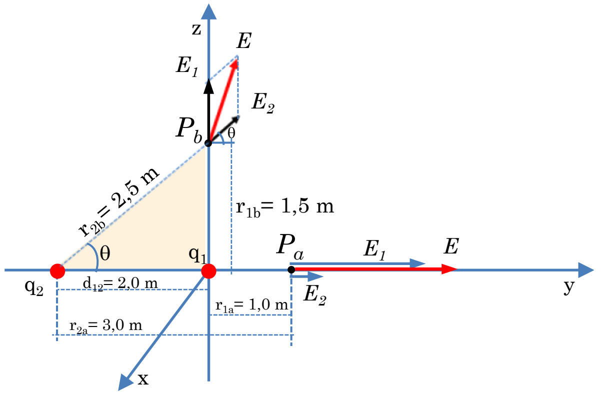
dove $\hat{r}_i$ è il vettore diretto da q_i a P ed r_i è la distanza tra q_i e P

Esempio

Esempio:
Due particelle 1 e 2, con carica q_1=+16 nC e q_2= +28 nC, si trovano nelle posizioni di coordinate (x,y,z)=(0,0,0) e (0,-2.0m,0) rispettivamente. Determinare il campo elettrico

a) Nel punto P_a(0,1.0 m, 0)
b) Nel punto P_b(0,0,1.5 m)

$$\boxed{\vec{E}(P) = \vec{E}_1(P) + \vec{E}_2(P) = k\frac{q_1}{r_1^2}\hat{r}_1 + k\frac{q_2}{r_2^2}\hat{r}_2}$$



a) $$E_1(P_a) = k\frac{q_1}{r_{1a}^2} = \underbrace{9.0\cdot10^9\ Nm^2/C^2}_{k}\frac{16nC}{(1.0m)^2} = 140\ N/C \Rightarrow \vec{E}_1 = (140\ N/C)\hat{j}$$

$$E_2(P_a) = k\frac{q_2}{r_{2a}^2} = \underbrace{9.0\cdot10^9\ Nm^2/C^2}_{k}\frac{28\cdot10^{-9}C}{(3m)^2} = 28\ N/C \Rightarrow \vec{E}_2 = (28\ N/C)\hat{j}$$

Poiché sia E1 che E2 sono diretti lungo y $\boxed{\vec{E}(P_a) = \vec{E}_1(P_a) + \vec{E}_2(P_a) = (140\ N/C)\hat{j} + (28\ N/C)\hat{j} = (168\ N/C)\hat{j}}$

b) $$E_1(P_a) = k\frac{q_1}{r_{1b}^2} = \underbrace{9.0\cdot10^9\ Nm^2/C^2}_{k}\frac{16nC}{(1.5m)^2} = 64\ N/C \Rightarrow \vec{E}_1(P_a) = (64\ N/C)\hat{k}$$

Per determinare il campo elettrico $E_2(P_b)$ dobbiamo prima determinare le distanza del punto P_b dalla carica 2:

$$r_{2b} = \sqrt{(2)^2 + (1.5)^2}\ m = \sqrt{4 + 2.25}\ m = 2.5m$$

Devo determinare quanto valgono

$$E_2 = k\frac{q_2}{r_{2b}^2} = \underbrace{9.0\cdot10^9\ Nm^2/C^2}_{k}\frac{28\cdot10^{-9}C}{(2.5m)^2} = \frac{252}{6.25}\ N/C = 40\ N/C \Rightarrow \vec{E}_2(P_b) = (40\ N/C)\cos\theta\,\hat{j} + (40\ N/C)\sin\theta\,\hat{k}$$

$$d_{12} = r_{2b}\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{d_{12}}{r_{2b}} = \frac{2}{2.5} = 0.8 \Rightarrow \vec{E}_2(P_b) = (40\ N/C)\cdot0.8\,\hat{j} + (40\ N/C)\cdot0.6\,\hat{k} = (32\ N/C)\hat{j} + (24\ N/C)\hat{k}$$

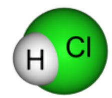
$$r_1 = r_{2b}\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{r_{1b}}{r_{2b}} = \frac{1.5}{2.5} = 0.6$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E}(P_b) &= \vec{E}_1(P_b) + \vec{E}_2(P_b) = (64\ N/C)\hat{k} + (32\ N/C)\hat{j} + (24\ N/C)\hat{k} = \\ &= (32\ N/C)\hat{j} + (88\ N/C)\hat{k}\end{aligned}}$$

Campo elettrico di un dipolo

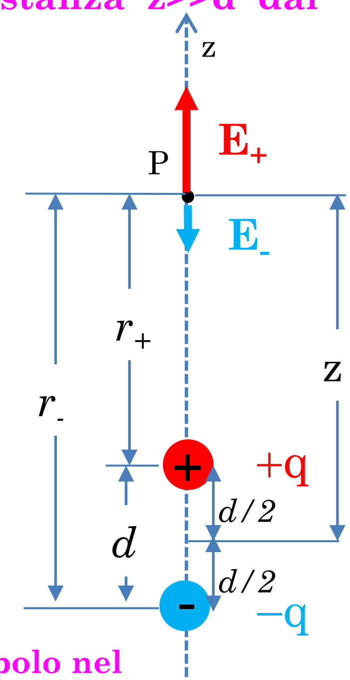
➢Il dipolo elettrico è una distribuzione particolare di carica costituito da due cariche puntiformi di valore assoluto uguale e segno di carica opposto, posizionate ad una distanza molto vicina tra loro rispetto alle distanze presenti nel contesto. Le due quantità che caratterizzano il dipolo sono la carica del dipolo e la l'asse del dipolo (distanza tra le due cariche)

➢Le molecole, quando inserite in un campo elettrico si comportano come dipoli ed esistono dei dipoli permanenti come l'acido cloridrico (HCl)



➢Consideriamo il dipolo costituito da due cariche +q e −q poste a distanza *d* tra loro.

Campo elettrico generato dal dipolo nel punto P sull'asse del dipolo ad una distanza z>>d dal centro del dipolo



Il campo generato da un complesso di cariche è dato dal vettore somma dei campi dovuti alle singole cariche puntiformi => è necessario conoscere il campo di ciascuna carica.

$$\boxed{\vec{E}(P) = \vec{E}_+(P) + \vec{E}_-(P)}$$

I singoli campi generati dalle due cariche nel punto P sono lungo l'asse z e quindi anche il campo totale sarà lungo l'asse z

Se r_+ = distanza del punto P dalla carica +q

$$\boxed{E_+ = +k\frac{q}{r_+^2}}$$

Campo elettrico generato dalla carica +q nel punto P

Se r_- = distanza del punto P dalla carica -q

$$\boxed{E_- = -k\frac{q}{r_-^2}}$$

Campo elettrico generato dalla carica -q nel punto P

$$r_+ = z - d/2 \qquad E_+ = k\frac{q}{r_+^2} = k\frac{q}{(z-d/2)^2}$$

$$r_- = z + d/2 \qquad E_- = -k\frac{q}{r_-^2} = -k\frac{q}{(z+d/2)^2}$$

Campo elettrico generato dal dipolo nel punto P sull'asse del dipolo

$$\boxed{E = E_+ + E_- = k\left(\frac{q}{(z-d/2)^2} - \frac{q}{(z+d/2)^2}\right)}$$

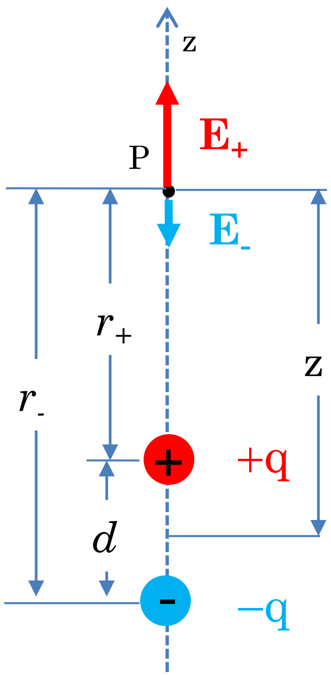
Campo elettrico di un dipolo(2)

$$E = E_+ + E_- = k\left(\frac{q}{(z-d/2)^2} - \frac{q}{(z+d/2)^2}\right)$$

$$E = qk\frac{z^2}{z^2}\left[\frac{1}{(z-d/2)^2} - \frac{1}{(z+d/2)^2}\right] = \frac{qk}{z^2}\left[\left(\frac{z}{z-d/2}\right)^2 - \left(\frac{z}{z+d/2}\right)^2\right] = \frac{qk}{z^2}\left[\frac{1}{(1-d/2z)^2} - \frac{1}{(1+d/2z)^2}\right]$$

NB: nel caso in cui $d/z \ll 1$ vale la seguente approssimazione:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{(1+d/2z)^2} \approx 1 - d/z \\ \dfrac{1}{(1-d/2z)^2} \approx 1 + d/z \end{cases} \Rightarrow \left[\frac{1}{(1-d/2z)^2} - \frac{1}{(1+d/2z)^2}\right] = [(1+d/z) - (1-d/z)] = 2d/z$$



$$\boxed{E = k\frac{2qd}{z^3}}$$

Campo elettrico di un dipolo di carica *q* e asse *d* calcolato in un punto lungo la direzione dell'asse posto ad una distanza z dal centro del dipolo grande rispetto alle dimensioni dell'asse del dipolo

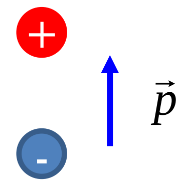
NB: la quantità ***qd*** contiene le due proprietà intrinseche del dipolo (carica e distanza tra le cariche), viene chiamata **momento del dipolo** ed è indicato con il simbolo **p**

Campo elettrico di un dipolo (3)

$\boxed{p = qd}$ **Momento di dipolo elettrico** $\Rightarrow$ $\boxed{E = 2k\dfrac{p}{z^3}}$

Se consideriamo il momento di dipolo come un vettore, esso è diretto come l'asse ed ha verso che va dalla carica negativa alla carica positiva

$$\boxed{\vec{p} = q\vec{d}}$$



➢Se si misura il campo elettrico di un dipolo a grande distanza, non compariranno mai separatamente q e d ma solo il loro prodotto.

➢Il campo quindi non cambia se viene raddoppiata la carica del dipolo e dimezzata la distanza tra le due cariche o viceversa.

➢Si può dimostrare che, quando il campo del dipolo elettrico viene misurato a grande distanza, anche se in un punto fuori dall'asse, il campo elettrico risulterà proporzionale all'inverso del cubo della distanza del punto dal centro del dipolo

$$\boxed{E \propto \frac{1}{r^3}}$$

Campo elettrico di un dipolo di carica *q* e asse *d* calcolato in un punto ad una distanza r dal centro del dipolo grande rispetto alle dimensioni dell'asse del dipolo

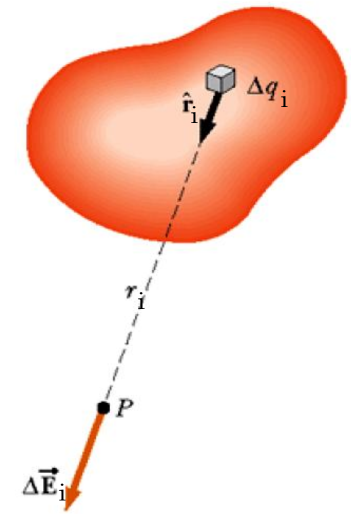
➢Il campo elettrico di un dipolo si riduce quindi più rapidamente del campo elettrico generato da una carica singola ($E \propto 1/r^2$)

➢Il campo elettrico per punti distanti sull'asse del dipolo è sempre diretto come il momento di dipolo

Campo elettrico generato da una distribuzione continua di carica

➢Quando il campo elettrico generato da un insieme di cariche lo si calcola in un punto ad una distanza molto maggiore della distanza tra le cariche, si può considerare che il sistema di cariche sia continuo e che il campo sia generato da carica totale distribuita uniformemente in un dato volume o su una data superficie

➢Per determinare il campo elettrico generato da una distribuzione continua di cariche si deve suddividere la distribuzione di carica in piccoli elementi ognuno dei quali contenenti la carica Δq e calcolare separatamente i campi elettrici generati da questi elementi (assunti come carica puntiforme)



➢Il campo elettrico generato dall'elemento i-simo nel punto P sarà quindi

$$\boxed{\overrightarrow{\Delta E_i} = k\frac{\Delta q}{r_i^2}\hat{r}_i}$$

➢Il campo elettrico totale sarà quindi dato dalla somma dei campi generati dai singoli elementi:

$$\boxed{\overrightarrow{\Delta E} = k\sum_i \frac{\Delta q}{r_i^2}\hat{r}_i}$$

➢Riducendo le dimensioni degli elementi di distribuzione fino a livelli infinitesimi si ottiene:

$$\boxed{\vec{E} = \lim_{\Delta q \to 0} k\sum_i \frac{\Delta q}{r_i^2}\hat{r}_i} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = k\int_Q \frac{dq}{r^2}\hat{r}}$$

Campo elettrico generato da una distribuzione uniforme di carica

NB: l'integrale è esteso a tutta la carica che crea il campo ed è una grandezza vettoriale, che dipende dal tipo di distribuzione di carica

Campo elettrico generato da una distribuzione continua di carica

A seconda del tipo di distribuzione di carica (di volume, di superficie, di linea) la carica infinitesima dq associata all'elemento di distribuzione verrà espressa come:

$dq = \rho dV$ ρ = Densità di carica di volume per volume infinitesimo dV

$dq = \sigma dS$ σ = Densità di carica superficiale per superficie infinitesima dS

$dq = \lambda dl$ λ = Densità di caria lineare per lunghezza infinitesima dl

Se Q è la carica totale uniformemente distribuita in un volume V, la corrispondente densità di carica sarà:

Densità di carica di volume

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{[C]}{[m^3]}$$

Carica per unità di volume

Se Q è la carica totale uniformemente distribuita su una superficie S , la corrispondente densità di carica sarà:

Densità superficiale di carica

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{[C]}{[m^2]}$$

Carica per unità di superficie

Se Q è la carica totale uniformemente distribuita su una lunghezza ℓ la corrispondente densità di carica sarà:

Densità lineare di carica

$$\lambda = \frac{Q}{\ell} = \frac{[C]}{[m]}$$

Carica per unità di lunghezza